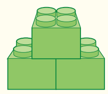
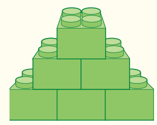
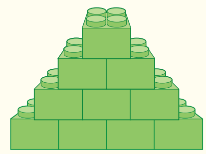
1-2 等差級數

- 等差級數的和
- 等差級數的應用

溫故啟思

1. 小華用積木疊成一座三角形的塔，請填入積木數。

				
層數	1 層	2 層	3 層	4 層
積木數	1 個	3 個	6 個	10 個

2. 求 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=$ 45 。

1 等差級數的和

在鉛筆工廠中，為了方便計算製成鉛筆的數量，有一種放置鉛筆的容器稱作「籮」（如圖 1-1），它的外觀為一個倒三角形，最下面的一層有一枝鉛筆，每上一層就多一枝鉛筆，如果要裝滿這個容器，最上面的那一層有 17 枝鉛筆。你知道裝滿容器的話，總共有幾枝鉛筆呢？

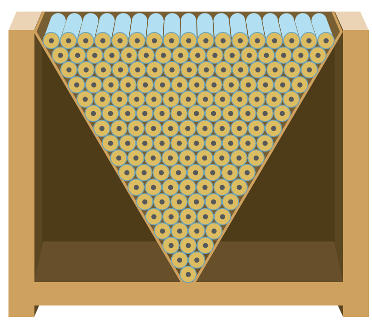


圖 1-1

如果我們要一層一層的把鉛筆數量相加，勢必要花上不少時間，所以除了直接相加得到總和之外，我們來找一些可以快速找到答案的方法。

首先我們將每一層鉛筆數量相加列成式子，總數為 S，則

$S=1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots\cdots+15+16+17$

我們將圖 1-1 倒放成圖 1-2，則鉛筆總數仍然不變，可寫成：

$$S = 17 + 16 + 15 + \cdots\cdots + 3 + 2 + 1$$

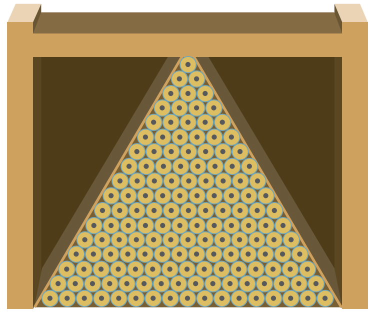


圖 1-2

最後將圖 1-1 與圖 1-2 拼成圖 1-3。

我們可以發現圖 1-3 共有 17 層，每層都有 18 枝鉛筆，總共有（18×17）枝，恰好是圖 1-1 的兩倍，列式可寫成：

$$2S = 18 + 18 + 18 + 18 + 18 + \cdots\cdots + 18 + 18 + 18$$
$$= 18 \times 17$$

因此圖 1-1 的鉛筆共有 $\dfrac{18 \times 17}{2} = 153$（枝）。

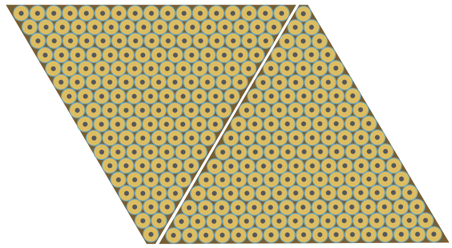


圖 1-3

會選用 17 層是因為一打有 12 枝，12 打共有 144 枝，裝滿之後再抽出 9 枝，即可很快得到 $153 - 9 = 144$（枝）。

隨堂練習

$11 + 12 + 13 + \cdots\cdots + 19 + 20$ 的和為多少？

$\dfrac{(11 + 20) \times 10}{2} = \dfrac{31 \times 10}{2} = 155$。

將一個數列的各項依序用加號「＋」相加，所得到的式子就稱為**級數**；將一個等差數列的各項依序用加號「＋」相加，所得到的式子就稱為**等差級數**。例如：上述計算鉛筆數量的式子中，$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots\cdots + 15 + 16 + 17$ 就是一個等差級數，而 153 就是此等差級數的和。

相傳德國數學家高斯（*C. F. Gauss*，西元 1777～1855 年）9 歲時，在算術課上，老師給了一道題目「$1+2+3+\cdots\cdots+99+100=?$」，老師剛把題目說完，高斯就舉手說出答案是 5050。高斯是如何算出來的呢？

高斯的算法是這樣的：設 $S=1+2+3+\cdots\cdots+99+100$

$$\begin{array}{rccccccccc} S= & \boxed{1} & + & \boxed{2} & + & \boxed{3} & +\cdots\cdots+ & \boxed{99} & + & \boxed{100} \\ +)\ S= & \boxed{100} & + & \boxed{99} & + & \boxed{98} & +\cdots\cdots+ & \boxed{2} & + & \boxed{1} \\ \hline \end{array}$$

$$2S=\underbrace{101+101+101+\cdots\cdots+101+101}_{\text{共 100 項}}=100\times101$$

所以 $S=\dfrac{100\times101}{2}=5050$。

一般而言，給定一個公差為 d 的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$，此數列前 n 項的總和記為 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。那麼該如何求 S_n 呢？

1.
$$\begin{array}{rccccccccc} S_n= & \boxed{a_1} & + & \boxed{a_2} & + & \boxed{a_3} & +\cdots\cdots+ & \boxed{a_{n-1}} & + & \boxed{a_n} \\ +)\ S_n= & \boxed{a_n} & + & \boxed{a_{n-1}} & + & \boxed{a_{n-2}} & +\cdots\cdots+ & \boxed{a_2} & + & \boxed{a_1} \\ \hline \end{array}$$

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

2. 因為 $a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n$

$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+(a_n-2d)=a_1+a_n$

$\vdots$

$a_n+a_1=a_1+a_n$

所以
$$\begin{aligned} 2S_n &=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots\cdots+(a_n+a_1) \\ &=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots+(a_1+a_n)}_{\text{共有 } n \text{ 個 } (a_1+a_n)} \\ &=n\times(a_1+a_n) \end{aligned}$$

故 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

等差級數的和

設公差為 d 的等差數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n$，前 n 項的總和為

$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$，則 $S_n=\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

例 1 求等差級數的和

有一個等差數列 3 , 10 , 17 , 24 , 31 , 38 , 45 , ⋯⋯，求：

(1) 此數列前 5 項的和 S_5。

(2) 此數列前 6 項的和 S_6。

解 (1) 首項 $a_1=3$，第 5 項 $a_5=31$，項數 $n=5$。

由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

得 $S_5=\dfrac{5\times(3+31)}{2}=\dfrac{5\times34}{2}=85$。

故前 5 項的和 $S_5=85$。

(2) 前 5 項的和 $S_5=85$，第 6 項 $a_6=38$。

得 $S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=S_5+a_6=85+38=123$。

故前 6 項的和 $S_6=123$。

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$。

隨堂練習

求下列等差級數的和：

(1) $S_{10}=4+7+10+13+16+19+22+25+28+31$。

首項 $a_1=4$，$a_{10}=31$，項數 $n=10$

$S_{10}=\dfrac{10\times(4+31)}{2}=5\times35=175$

(2) 承上題，求 S_{11}。

因為公差 $d=7-4=3$，所以 $a_{11}=31+3=34$

得 $S_{11}=S_{10}+a_{11}=175+34=209$

例 2 已知等差級數，求 n 及 S_n

試問等差級數 11＋13＋15＋……＋97＋99 共有多少項？它的和是多少？

解

首項 $a_1=11$，公差 $d=13-11=2$，$a_n=99$。

由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $99=11+(n-1)\times 2$，

$99=11+2n-2$，$90=2n$，$n=45$，

又 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{45\times(11+99)}{2}=\dfrac{45\times 110}{2}=45\times 55=2475$，

故此等差級數共有 45 項，和是 2475。

隨堂練習

試問等差級數 3＋10＋17＋……＋80 共有多少項？它的和是多少？

首項 $a_1=3$，公差 $d=10-3=7$，$a_n=80$。

由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $80=3+(n-1)\times 7$，$n=12$，

$S_{12}=\dfrac{12\times(3+80)}{2}=6\times 83=498$，故此等差級數共有 12 項，和是 498。

數養時光機 高斯

德國數學家高斯（*Johann Carl Friedrich Gauss*，西元 1777～1855 年），從小就顯現出學習的熱忱及高超的能力，12 歲已經開始懷疑幾何原本中的基礎證明。在 19 歲時，提出「正 17 邊形」的尺規作圖法，他一生在數學、物理學、天文學、大地測量學的貢獻良多，有「數學王子」的美譽。高斯的肖像在 1989～2001 年底，被放在德國 10 馬克的鈔票中。

例 3 求等差級數的項數及公差

已知一等差級數的首項為 5，末項為 95，和為 950，求此等差級數的項數及公差。

解 設項數為 n，又 $a_1=5$，$a_n=95$，$S_n=950$。

由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，得 $950=\dfrac{n\times(5+95)}{2}$，$950=\dfrac{n\times 100}{2}$，

$100n=1900$，$n=19$，

又 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $95=5+18d$，$18d=90$，$d=5$，

故此等差級數共有 19 項，公差為 5。

隨堂練習

已知一等差級數的首項為 -6，末項為 36，和為 180，求此等差級數的項數及公差。

設項數為 n，又 $a_1=-6$，$a_n=36$，$S_n=180$。

由 $S_n=\dfrac{n\times(a_1+a_n)}{2}$，得 $180=\dfrac{n\times[(-6)+36]}{2}$，

$15n=180$，$n=12$，

又 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $36=-6+11d$，$11d=42$，$d=\dfrac{42}{11}$，

故此等差級數共有 12 項，公差為 $\dfrac{42}{11}$。

我們知道等差級數的和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，因此只要找出級數的首項 a_1、末項 a_n 及項數 n，即可求出此等差級數的和。在例題 3 中，我們可以用首項、項數及公差反推算等差級數的和，即 $S_{19}=\dfrac{19\times(5+5+18\times5)}{2}=950$，一般而言，我們可將 1-1 學過的 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ 代入等差級數和的公式中，得到

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}。$$

因此，即使不知道末項，仍可從首項、公差、項數這些條件算出等差級數的和。

例 4　已知首項、公差，求 S_n

若一等差級數的首項為 -2，公差為 3，求此等差級數前 15 項的和。

解

解1　已知 $a_1=-2$，$d=3$，$n=15$。

由 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$，

得 $S_{15}=\dfrac{15\times[2\times(-2)+(15-1)\times3]}{2}=\dfrac{15\times[(-4)+42]}{2}$

$=15\times19=285$，

故前 15 項的和為 285。

解2　已知 $a_1=-2$，$d=3$，$n=15$。

由 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $a_{15}=-2+14\times3=-2+42=40$，

由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，得 $S_{15}=\dfrac{15\times[(-2)+40]}{2}=15\times19=285$，

故前 15 項的和為 285。

隨堂練習

若一等差級數的首項為 -26，公差為 4，求此等差級數前 20 項的和。

$a_1=-26$，$d=4$，$n=20$。

$S_{20}=\dfrac{20\times[2\times(-26)+(20-1)\times4]}{2}=\dfrac{20\times[(-52)+76]}{2}=10\times24=240$

故前 20 項的和為 240。

2 等差級數的應用

例 5 等差級數的應用（I）

浩南運用「365 存錢法」，第一天存 1 元，第二天存 2 元，第三天存 3 元，每一天比前一天多存 1 元，存了 365 天後，請問浩南存了多少元？

解 已知 $a_1=1$，$d=1$，$n=365$，

則 $S_{365}=\dfrac{365\times〔2\times1+(365-1)\times1〕}{2}$

$=\dfrac{365\times366}{2}=66795$，

故浩南存了 66795 元。

隨堂練習

依霖存了 100 天的零用錢，只知道每一天所存的錢成等差數列，且第 1 天存 1 元，請問公差 d 至少為多少時，存款總額會超過 66000 元？（d 為整數）

已知 $a_1=1$，$n=100$，

$S_{100}=\dfrac{100\times〔2\times1+(100-1)\times d〕}{2}>66000$

$50\times(2+99d)>66000$

$2+99d>1320$

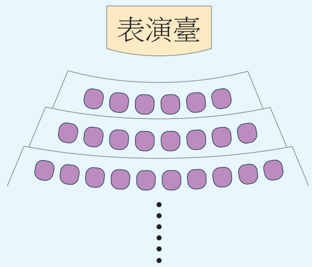
$99d>1318$

$d>13.3\cdots\cdots$

故公差 d 至少為 14 時，存款總額會超過 66000 元。

例 6 等差級數的應用（II）

香香找到一個表演會場作為成果發表會演出使用，已知會場總共有 300 個座位，第一排有 6 個座位，後面一排比前一排多出兩個座位，請問這個會場總共有幾排座位？



解

$a_1=6$，$d=2$，$S_n=300$。

由 $S_n=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$，

得 $300=\dfrac{n\times\left[2\times6+(n-1)\times2\right]}{2}$，

$300=\dfrac{n\times\left[2n+10\right]}{2}$，

$300=n(n+5)$，

$300=n^2+5n$，

$n^2+5n-300=0$，

$(n+20)(n-15)=0$，

得 $n=-20$（不合）或 $n=15$，

故這個會場總共有 15 排座位。

隨堂練習

某超商用 120 個罐頭疊成一座罐頭塔，已知第一層有 1 個罐頭，從第二層開始，每一層的罐頭數量都比上一層多 4 個，請問 120 個罐頭全部用完會疊出幾層罐頭塔？

$a_1=1$，$d=4$，$S_n=120$。

$S_n=\dfrac{n\times\left[2+(n-1)\times4\right]}{2}=120$，$n(2n-1)=120$，$2n^2-n-120=0$，

$(2n+15)(n-8)=0$，$n=-\dfrac{15}{2}$（不合）或 $n=8$，故會疊出 8 層罐頭塔。

例 7　等差級數的部分和

老師為了鼓勵班上同學課業的努力及好表現，決定頒發獎學金，這次段考第一名得到 50 元，第二名得到 47 元，以此遞減，後一名的獎學金比前一名少 3 元，發到不能再發放為止（獎學金須為正數）。請問：

(1) 依照此規則，班上有幾位同學得到獎學金？（已知沒有同名次）

(2) 老師總共發下多少獎學金？

解

(1) 從第一名開始，獎金依序為等差數列，$a_1=50$，$d=47-50=-3$，

設從第 n 項開始為負數，

則 $a_n=50+(n-1)\times(-3)<0$，

$50-3n+3<0$，$3n>53$，$n>\dfrac{53}{3}=17\dfrac{2}{3}$，

故第 18 項開始為負數（不能再發放），

因此總共有 17 位同學得到獎學金。

(2) 此時和為

$$S_{17}=\frac{17\times[2\times50+(17-1)\times(-3)]}{2}=\frac{17\times(100-48)}{2}$$

$=17\times26=442$，

故老師總共發下獎學金 442 元。

隨堂練習

有一等差級數 $70+64+58+\cdots\cdots$，試問：

(1) 從第幾項開始為負數？

$a_n=70+(n-1)\times(-6)<0$，$6n>76$，$n>12\dfrac{2}{3}$，

故從第 13 項開始為負數。

(2) 當 m 為多少時，前 m 項的和為最大？此時和為多少？

此等差級數前 12 項的和為最大，故 $m=12$，此時和為

$$S_{12}=\frac{12\times[2\times70+(12-1)\times(-6)]}{2}=\frac{12\times(140-66)}{2}=444$$。

1-2 重點整理

1 級數

(1) 把數列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 的每一項依序相加，得到的式子 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 稱為**級數**。

(2) 把等差數列各項依序相加得出的式子，稱為**等差級數**。

2 等差級數的和

設公差為 d 的等差數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$，前 n 項的總和為 S_n，

則 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

例 已知 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 是等差數列，則

$S_7=\dfrac{7\times(1+13)}{2}=\dfrac{7\times[2\times1+(7-1)\times2]}{2}=49$。

1-2 自我評量

P.33 例 1

1 有一等差級數前 10 項的和 $S_{10}=395$，第 11 項 $a_{11}=10$，求 $S_{11}=$ __405__。

$S_{11}=S_{10}+a_{11}=395+10=405$ （20 分）

P.36 例 4

2 求下列各等差級數的和：（每小題 10 分）

(1) 已知 2 , 5 , 8 , …… 是等差數列，求前 30 項的和 $S_{30}=$ __1365__。

$d=5-2=3$，

$S_{30}=\dfrac{30\times[2\times2+(30-1)\times3]}{2}=\dfrac{30\times91}{2}=1365$

(2) 已知一等差數列中，首項 $a_1=6$，第 11 項 $a_{11}=56$，求前 11 項的和 $S_{11}=$ __341__ 。

$$S_{11}=\frac{11\times(6+56)}{2}=341$$

P.35 例 3

3 已知一等差級數的首項為 3，末項為 77，和為 720，求此等差級數的項數及公差。（20 分）

$$720=\frac{n(3+77)}{2}\Rightarrow 40n=720\Rightarrow n=18$$

$$77=3+(18-1)\times d\Rightarrow 17d=74\Rightarrow d=\frac{74}{17}$$

故共有 18 項，公差為 $\frac{74}{17}$ 。

P.36 例 4

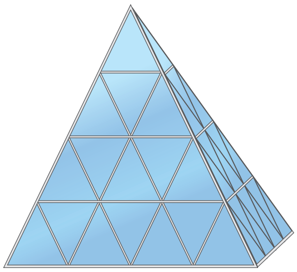
4 若一等差級數的首項為 -2，公差為 -3，求此等差級數前 25 項的和。（20 分）

$$S_{25}=\frac{25\times〔2\times(-2)+(25-1)\times(-3)〕}{2}$$

$$=\frac{25\times(-76)}{2}=-950$$

P.37 例 5

5 右圖為臺北花博公園的金字塔造景的其中一面，以三角形構成。從上面開始算第一層有一個三角形，第二層有三個三角形，如果這個金字塔按照此規律造出 10 層，那這一面會有幾個三角形？（20 分）



$a_1=1$，$a_2=3$，$d=2$

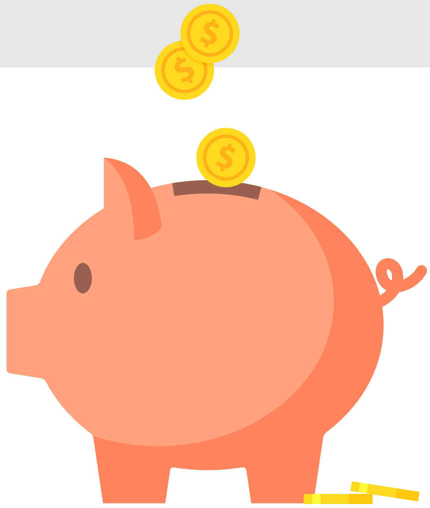
$$S_{10}=\frac{10\times〔2\times1+(10-1)\times2〕}{2}=\frac{10\times20}{2}=100$$

故有 100 個三角形。

單利與複利

連結：社會

你知道嗎？如果把錢存入銀行或是做一些穩定的儲蓄型保單，會有「大錢生小錢」的效果喔！我們把存進去的錢叫作「本金」，存了一段時間後所生的錢叫作「利息」，而我們把「本金＋利息」的總和稱作「本利和」。



浩南今年過年領到一萬元的紅包，想要存起來，媽媽整理兩家銀行的儲蓄方案如下：

天地銀行定存 10 年，每年年利率 2%，以單利（註一）計算

冠軍銀行定存 10 年，每年年利率 1.9%，以複利（註二）計算

問題 看到這裡，你認為浩南應該要選擇哪間銀行呢？

註一　單利就是每年的利息，只以本金計算。

註二　複利就是每年的利息，以前一年的本利和計算。

浩南如果將壓歲錢存入兩家銀行，一年後分別可得到 200 元與 190 元的利息，看起來天地銀行的利息比較高。兩年後又可分別得到 200 元與 193.61 元的利息。

	天地	冠軍
1 年後	$10000 \times 2\% = 200$	$10000 \times 1.9\% = 190$
2 年後	$10000 \times 2\% = 200$	$(10000 + 190) \times 1.9\% = 193.61$

兩年後天地銀行的利息還是較高，但是冠軍銀行的利息卻比前一年多了 3.61 元。

這是因為天地銀行是以單利計算，每年的利息都是以本金計算的 2%，所以每一年都可以拿到 200 元的利息。而冠軍銀行以複利計算，每年拿到的利息都可以加進本金再算下一年的利息，所以利息才會愈來愈高。

其實單利可以視為等差數列，複利可以視為等比數列。因為浩南選擇定存 10 年，10 年後冠軍銀行的本利和較高，所以浩南應該選擇冠軍銀行。

年數	天地銀行 單利 2%		
	利息	本利和	
1	200.00	10,200.00	+200
2	200.00	10,400.00	+200
3	200.00	10,600.00	+200
4	200.00	10,800.00	+200
5	200.00	11,000.00	+200
6	200.00	11,200.00	+200
7	200.00	11,400.00	+200
8	200.00	11,600.00	+200
9	200.00	11,800.00	+200
10	200.00	12,000.00	

冠軍銀行 複利 1.9%		
利息	本利和	
190.00	10,190.00	x1.019
193.61	10,383.61	x1.019
197.29	10,580.90	x1.019
201.04	10,781.94	x1.019
204.86	10,986.80	x1.019
208.75	11,195.55	x1.019
212.72	11,408.27	x1.019
216.76	11,625.03	x1.019
220.88	11,845.91	x1.019
225.07	12,070.98	