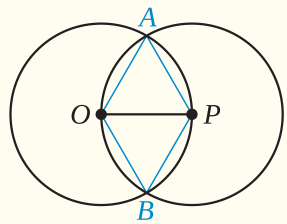
3-2 基本尺規作圖

• 等線段作圖 • 等角作圖 • 中垂線作圖 • 角平分線作圖

溫故啟思

如右圖，已知圓 O 的圓心為 O 點，半徑為 $\overline{OP}$；圓 P 的圓心為 P 點，半徑亦為 $\overline{OP}$。若兩圓的交點為 A、B，今連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{PA}$、$\overline{PB}$，則：



(1) $\overline{OA}$ ＿＝＿ $\overline{OB}$。（填入＞、＝或＜）

(2) $\overline{OA}$ ＿＝＿ $\overline{PA}$。（填入＞、＝或＜）

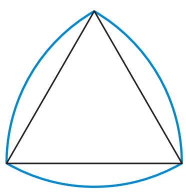
(3) $\triangle AOP$ 是 ☑正三角形 □不等邊三角形。

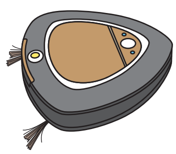
(4) 四邊形 $AOBP$ 是 □正方形 ☑菱形。

1 等線段作圖

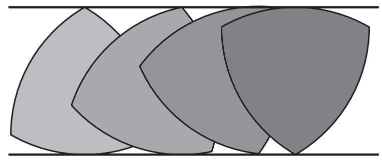
在數學上，當直尺不使用其刻度，而是只用來繪畫通過兩點的直線或線段，圓規只用來繪畫以某點為圓心，某一線段長為半徑的圓或圓弧，在這種條件下的作圖方式，我們稱為**尺規作圖**。

如今的設計圖稿雖多已採用繪圖軟體處理，但其中很多設計構想仍源自於基礎的尺規作圖概念。例如標榜獨特外型足以徹底清除角落灰塵的掃地機器人，其設計靈感便是來自三段圓弧構成的「勒洛三角形」。以下我們先介紹線段相等與角度相等的尺規作圖。





數養時光機 勒洛三角形

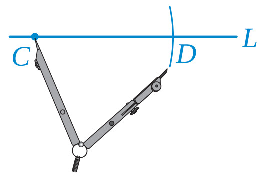


勒洛三角形 (*Reuleaux triangle*) 是由十九世紀德國機械工程師佛朗茲‧勒洛 (*Franz Reuleaux*) 以正三角形的頂點為圓心，邊長為半徑繪製成的定寬曲線，可在兩平行線中間滾動，相關的設計應用於萬克引擎 (*Wankel engine*)、方孔鑽頭及掃地機器人等。

我們知道相異兩點可以連成一直線，若再利用圓規畫圓弧的動作，我們可以畫出 $\overline{CD}$ 與已知的 $\overline{AB}$ 相等，步驟如下：

(1) 以直尺畫一直線 L，並在 L 上適當取一點 C 。

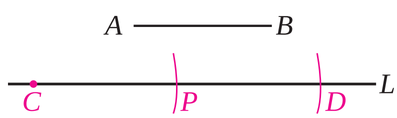
(2) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 D 點。



則由上述的作圖步驟可知：$\overline{CD}$ 長與半徑 $\overline{AB}$ 相等。

隨堂練習

如右圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出 $\overline{CD}$，使得 $\overline{CD}=2\overline{AB}$。



(1) 畫一直線 L，在 L 上取一點 C。

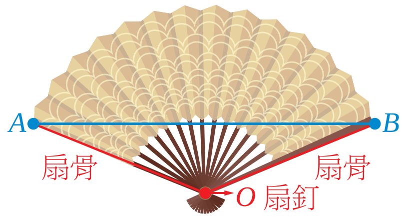
(2) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 P 點。

(3) 再以 P 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 D 點，則 $\overline{CD}=2\overline{AB}$ 即為所求。

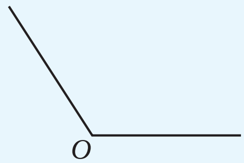
一般而言，為了要能確認尺規作圖的內容與步驟，需保留所有作圖的痕跡。但有時只由圖示不容易看出步驟的先後順序，故為方便學習，作圖的步驟會輔以文字說明，同學們在作圖時，也可以檢視其作法。

2 等角作圖

當摺扇開合時，我們可以發現當兩側扇骨端點 A、B 之間的距離 $\overline{AB}$ 固定時，在扇釘 O 點的 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 之間夾角 $\angle AOB$ 會隨之固定。利用這個特性，我們可以進行角度相等的作圖。



例 1　等角作圖

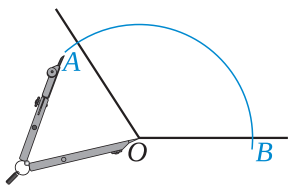


如左圖，已知 $\angle O$，利用尺規作圖畫出一個角，使其角度等於 $\angle O$。

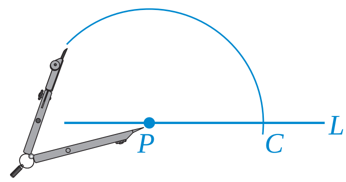
解

(1) 畫一直線 L，並在 L 上取一點 P。

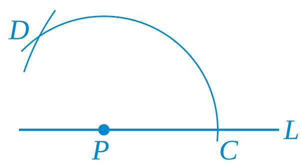
(2) 以 O 點為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交 $\angle O$ 的兩邊於 A、B 兩點。



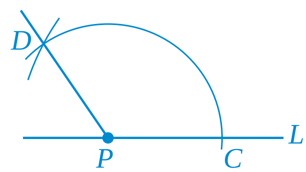
(3) 以 P 點為圓心，$\overline{OB}$ 長為半徑畫弧，交直線 L 於 C 點。



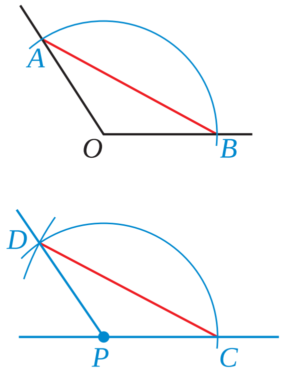
(4) 以 C 點為圓心，$\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，交前弧於 D 點。



(5) 連 $\overrightarrow{PD}$，則 $\angle DPC$ 即為所求。



如同前文扇子兩側的扇骨長相等，在例題 1 的作圖步驟⑵、⑶畫弧時的半徑也相等，即 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{PD}=\overline{PC}$。若連接 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DC}$ 如右圖，則如同扇子兩側扇骨端點間距離固定，在作圖步驟⑷畫弧時的半徑也相同，即 $\overline{AB}=\overline{DC}$。從兩扇骨在扇釘處的夾角會隨之固定，可以了解作出 $\angle O=\angle DPC$ 的作圖方法。

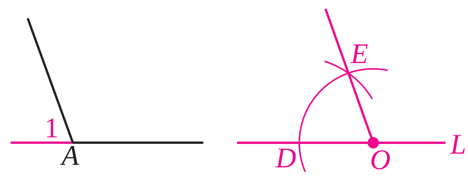


隨堂練習

如右圖，已知 $\angle A$，利用尺規作圖畫出一個角與 $\angle A$ 互補。

延長 $\angle A$ 的一邊得補角 $\angle 1$ 後，

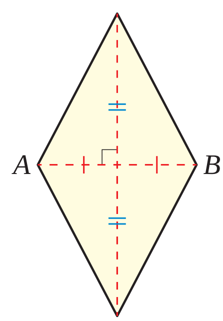
利用例題 1 作法作 $\angle EOD=\angle 1$ 即為所求。



3 中垂線作圖

中垂線（垂直平分線）

七年級時，我們利用摺紙操作（可利用附件㈥操作復習）認識菱形的對角線會互相垂直平分如右圖。那麼如何利用菱形的這個性質來畫中垂線呢？

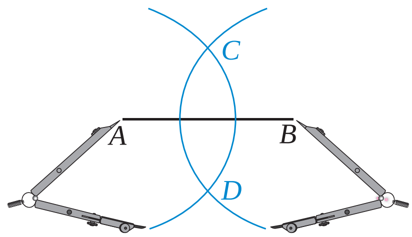


例 2　中垂線作圖

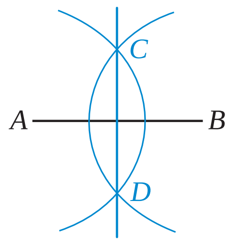
如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出 $\overline{AB}$ 的中垂線。

解

(1) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 C、D 兩點。

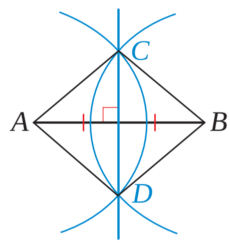


(2) 連接 $\overleftrightarrow{CD}$，則 $\overleftrightarrow{CD}$ 即為所求。

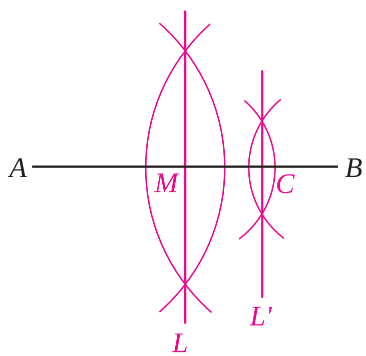


為了使兩弧有兩個交點，所取畫弧半徑需大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長。

由例題 2 的作圖結果連接 $\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 與 $\overline{BD}$，則可發現半徑 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}$，故四邊形 $ADBC$ 為菱形，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 皆為對角線。因為菱形的對角線會互相垂直平分，所以 $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線。中垂線作圖不僅可以得到 $\overline{AB}$ 的中垂線，也可以得到 $\overline{AB}$ 的中點，即 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點。



隨堂練習



如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上找一點 C，使得 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$。

(1) 作 $\overline{AB}$ 的中垂線 L 交 $\overline{AB}$ 於 M 點。

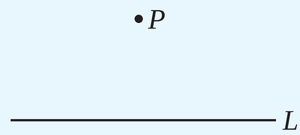
(2) 作 $\overline{BM}$ 的中垂線 L' 交 $\overline{BM}$ 於 C 點，則 C 點即為所求。

過線外一點作垂線

認識中垂線作圖後，我們也可將此延伸到「過線外一點作垂線」的作圖。

例3　過線外一點作垂線

如右圖，已知 P 點在直線 L 外，利用尺規作圖畫出通過 P 點，且與直線 L 垂直的直線。



解

(1) 以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點，如圖 3-6。

(2) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 Q 點，如圖 3-7。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求，如圖 3-8。

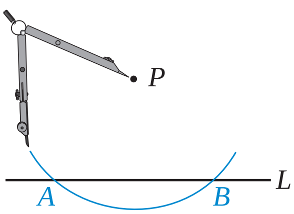


圖3-6

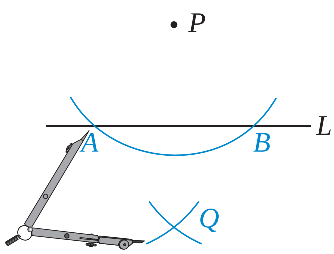


圖3-7

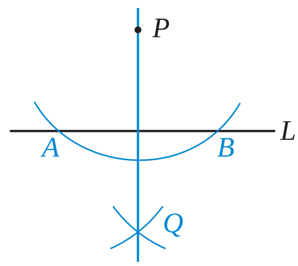
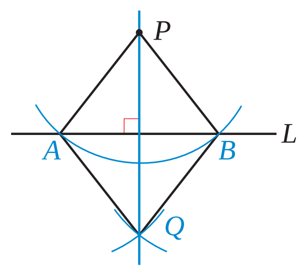


圖3-8

由例題 3 的作圖結果連接 $\overline{AP}$、$\overline{AQ}$、$\overline{BP}$、$\overline{BQ}$，則可發現 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 且 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$，故四邊形 $AQBP$ 為箏形。因為對角線 $\overline{PQ}$ 為箏形 $AQBP$ 的對稱軸，所以 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，即 $\overleftrightarrow{PQ}\perp L$。



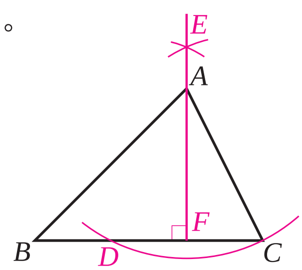
隨堂練習

如右圖，已知△ABC，利用尺規作圖畫出通過 A 點的高。

(1) 以 A 點為圓心，$\overline{AC}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

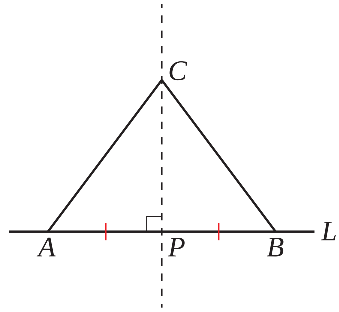
(2) 分別以 C、D 為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 E 點。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 點，則 $\overline{AF}$ 即為所求。

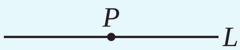


過線上一點作垂線

七年級時，認識等腰△ABC 的對稱軸會垂直平分底邊如右圖（可利用附件(七)操作復習）。那麼如何利用等腰三角形的這個性質來畫過線上一點的垂線呢？



例 4　過線上一點作垂線



如左圖，已知 P 點在直線 L 上，利用尺規作圖畫出通過 P 點且與直線 L 垂直的直線。

解

(1) 以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點，如圖 3-9。

(2) 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}$ $\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 C 點，如圖 3-10。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{PC}$，則 $\overleftrightarrow{PC}$ 即為所求，如圖 3-11。

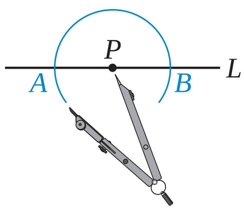


圖3-9

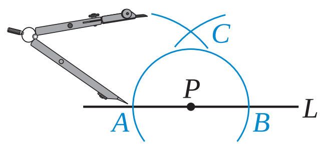


圖3-10

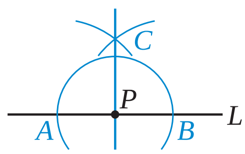
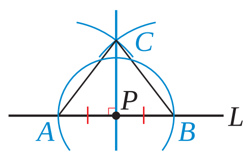


圖3-11

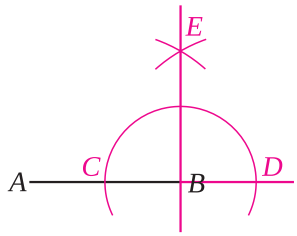
由例題 4 的作圖結果連接 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$，則可發現半徑 $\overline{AC}=\overline{BC}$，故△$ABC$ 為等腰三角形。因為 P 為 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{PC}$ 為等腰△ABC 的對稱軸，因此 $\overline{PC}\perp\overline{AB}$，即 $\overleftrightarrow{PC}\perp L$。



隨堂練習

如下圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖在 $\overline{AB}$ 上畫出過 B 點的垂線。

(1) 延長 $\overline{AB}$，以 B 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交 $\overrightarrow{AB}$ 於 C、D 兩點。



(2) 分別以 C、D 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{CD}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 E 點。

(3) 連接 $\overleftrightarrow{BE}$，則 $\overleftrightarrow{BE}$ 即為所求。

探索活動

三弧法作垂線

已知 $\overline{AB}$ 如右圖，試根據以下步驟完成尺規作圖：

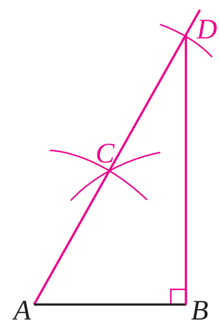
(1) 分別以 A、B 點為圓心，以 $\overline{AB}$ 為半徑畫弧，設兩弧交於 C 點。

(2) 連 $\overrightarrow{AC}$。

(3) 以 C 點為圓心，以 $\overline{AB}$ 為半徑，畫弧，交 $\overrightarrow{AC}$ 於 D 點。

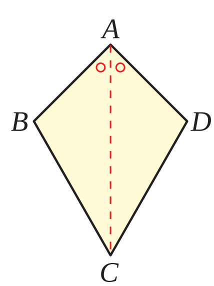
(4) 連 $\overleftrightarrow{BD}$。

請判斷 $\overleftrightarrow{BD}$ 是否垂直 $\overline{AB}$？與老師及同學說明你的看法。是。

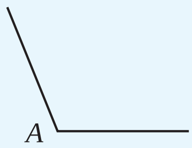


4 角平分線作圖

七年級時，我們利用摺紙操作（可利用附件(八)操作復習）認識箏形的對角線 $\overline{AC}$ 為其對稱軸如右圖。此時 $\angle BAC$ 與 $\angle DAC$ 是一組對稱角。那麼如何利用箏形的這個性質來畫出角平分線呢？



例 5　角平分線作圖



如左圖，已知$\angle A$，利用尺規作圖畫出$\angle A$的角平分線。

解

(1) 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交$\angle A$的兩邊於 B、C 兩點，如圖 3-12。

(2) 分別以 B、C 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 D 點，如圖 3-13。

(3) 連接 $\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 即為所求，如圖 3-14。

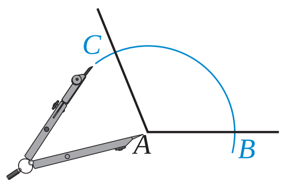


圖3-12

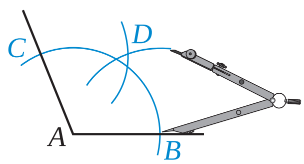


圖3-13

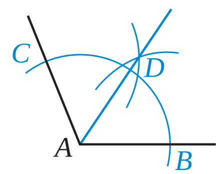
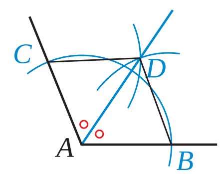
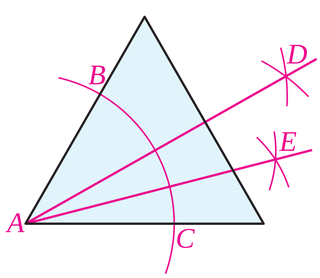


圖3-14

由例題 5 的作圖結果連接 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$，則可發現 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{BD}=\overline{CD}$，故四邊形 $ABDC$ 為箏形，此時對角線 $\overline{AD}$ 為箏形 $ABDC$ 的一條對稱軸，因此對稱角$\angle BAD=\angle CAD$，故 $\overrightarrow{AD}$ 平分$\angle BAC$。



隨堂練習



左圖是一個正三角形，利用尺規作圖畫出一個角度為 15° 的角。

(1) 以 A 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交$\angle A$的兩邊於 B、C 兩點。

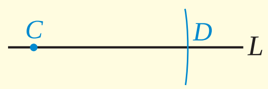
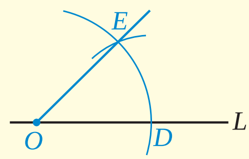
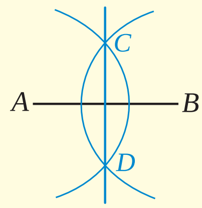
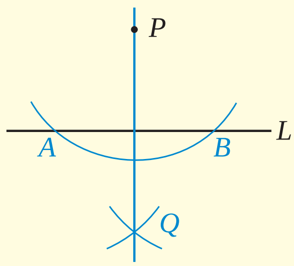
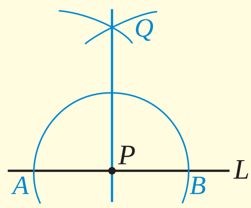
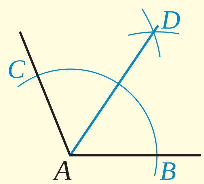
(2) 分別以 B、C 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 D 點，連接 $\overrightarrow{AD}$，則 $\overrightarrow{AD}$ 為$\angle BAC$的角平分線。

(3) 重複上述步驟作出$\angle DAC$的角平分線 $\overrightarrow{AE}$，則$\angle EAC$即為所求。

3-2 重點整理

1 基本尺規作圖

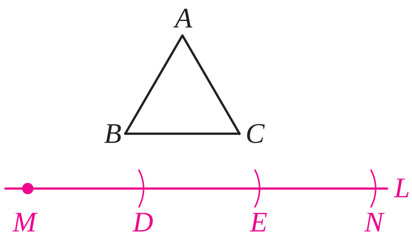
直尺不使用其刻度，只用來繪畫通過兩點的直線或線段，圓規只用來繪畫以某點為圓心，某一線段長為半徑的圓或圓弧。

<table>
<tr><th>等長線段</th><th>等角</th><th>中垂線</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><th>過線外一點作垂線</th><th>過線上一點作垂線</th><th>角平分線</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

3-2 自我評量

P.101 隨堂練習

1



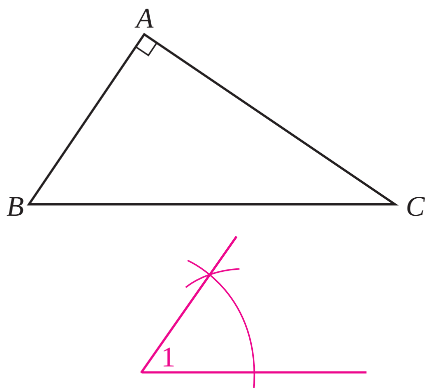
如左圖，已知正△ABC，利用尺規作圖畫出 $\overline{MN}$，使其長度等於△ABC 的周長。（**16** 分）

(1) 作一直線 L，取一端點為 M，以 M 點為圓心，△ABC 任一邊長為半徑畫弧，交 L 於 D 點。

(2) 以 D 點為圓心，同樣△ABC 任一邊長為半徑畫弧，交 L 於 E 點，並改以 E 點為圓心重複上述動作，交 L 於 N 點，則 $\overline{MN}$ 即為所求。

P.102 例 1

2



如左圖，已知直角三角形 ABC，利用尺規作圖畫出一個角，使其與∠C 互餘。（**16** 分）

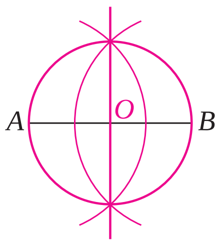
由圖可知直角三角形 ABC 的∠$A=90°$，

因此∠B 與∠C 互餘，

故作∠1=∠B 即為所求。

P.104 例 2

3



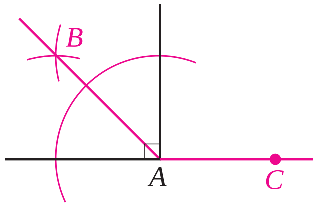
如左圖，已知 $\overline{AB}$，利用尺規作圖畫出一圓，使其直徑等於 $\overline{AB}$。（**16** 分）

(1) 作 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，交 $\overline{AB}$ 於 O 點。

(2) 以 O 點為圓心，$\overline{OA}$ 或 $\overline{OB}$ 為半徑畫圓，則圓 O 即為所求。

P.108 例 5

4 如下圖，已知∠A 為直角，利用尺規作圖畫出一個角為 135°。（16 分）

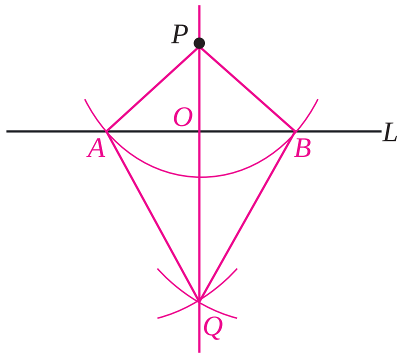


(1) 作∠A 的角平分線 $\overrightarrow{AB}$。

(2) 作∠A 一邊的延長線 $\overrightarrow{AC}$，則∠BAC 即為所求。

P.105 例 3

5 (1) 如右圖，已知 P 點在直線 L 外，依下列作法完成尺規作圖：（16 分）



① 以 P 點為圓心，適當長為半徑畫弧，交直線 L 於 A、B 兩點。

② 分別以 A、B 兩點為圓心，大於 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，設兩弧交於 Q 點。

③ 連接 $\overleftrightarrow{PQ}$，設 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交 L 於 O 點。

④ 連接 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{AQ}$、$\overline{BQ}$，得四邊形 $PAQB$。

(2) 承(1)，判斷下列敘述是否正確？（每小題 5 分）

(◯) 1. O 點為 $\overline{AB}$ 的中點。

(◯) 2. $\angle AOP = 90°$。

(◯) 3. $\angle AQO = \angle BQO$。

(×) 4. $\overline{AB}$ 為四邊形 $PAQB$ 的對稱軸。