3-3 三角形全等

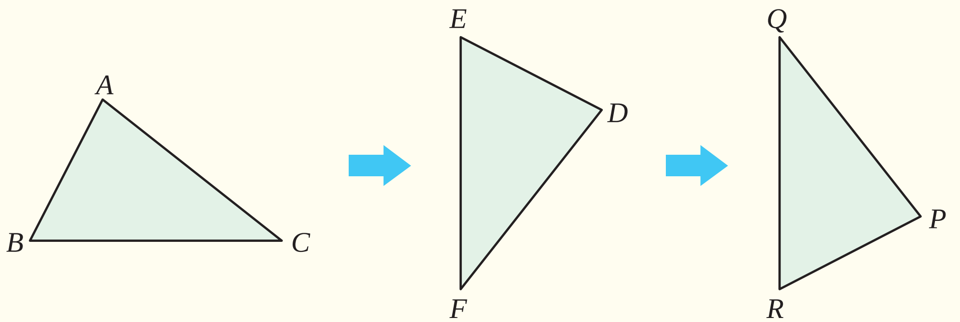
• 三角形全等　• 全等三角形的判別

溫故啟思

如下圖，嘉嘉利用文書軟體先將△ABC 複製後「向右旋轉 90 度」得△DEF，接著將△DEF 複製後「垂直翻轉」得△PQR。則：

(1) 與∠A 相等的角為　☐∠B　☐∠E　☑∠P　☐∠Q。

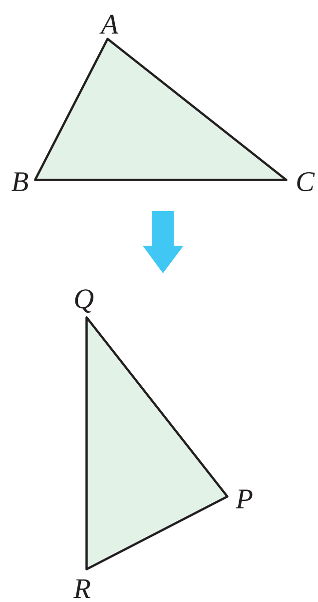
(2) 與 $\overline{QR}$ 相等的線段為　☐ $\overline{PQ}$　☐ $\overline{DF}$　☐ $\overline{AC}$　☑ $\overline{BC}$。



1 三角形全等

全等符號

國小時曾學過「如果兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉之後能完全疊合，則稱此兩個圖形全等。」在全等圖形中，彼此疊合的頂點、邊、角分別稱為這兩個圖形的**對應點**、**對應邊**、**對應角**。



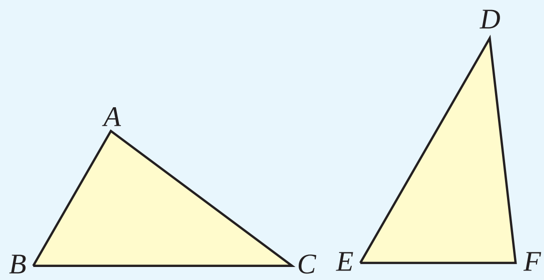
如右圖，若△ABC 經過平移、旋轉、翻轉之後會與△PRQ 完全疊合，我們記作△$ABC \cong$ △PRQ（讀作三角形 ABC 全等於三角形 PRQ）。由於對應點 A 點與 P 點重合，B 點與 R 點重合，C 點與 Q 點重合，故有以下結果：

1. 對應邊相等：$\overline{AB}=\overline{PR}$，$\overline{BC}=\overline{RQ}$，$\overline{AC}=\overline{PQ}$。

2. 對應角相等：$\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle R$，$\angle C=\angle Q$。

例1 全等三角形

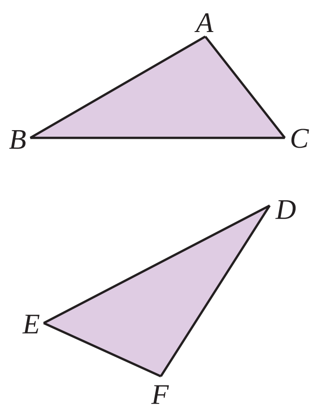
如右圖，已知$\triangle ABC \cong \triangle FED$，其中$A$、$B$、$C$三點的對應點分別為$F$、$E$、$D$三點。若$\overline{AB}=6$，$\overline{ED}=10$，$\angle E=60^\circ$，求$\angle B$的度數與$\overline{BC}$的長度。



解 因為$\triangle ABC \cong \triangle FED$且$B$、$C$兩點的對應點分別為$E$、$D$兩點，
所以$\angle B=\angle E=60^\circ$（對應角相等），
$\overline{BC}=\overline{ED}=10$（對應邊相等）。

隨堂練習

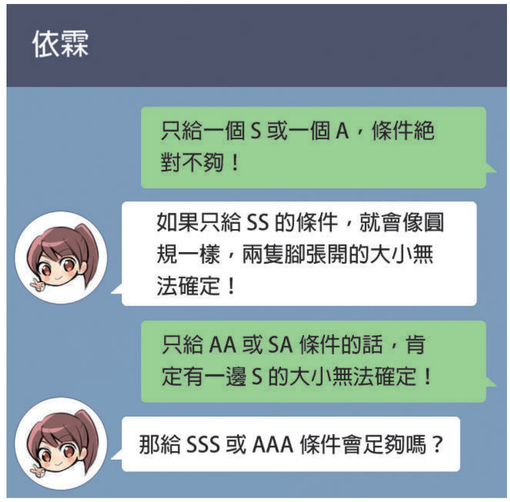
如右圖，已知$\triangle ABC \cong \triangle FDE$，其中$A$、$B$、$C$三點的對應點分別為$F$、$D$、$E$三點。若$\overline{AC}=7$，$\overline{AB}=11$，$\angle C=50^\circ$，求$\overline{FE}$的長度與$\angle E$的度數。



因為$\triangle ABC \cong \triangle FDE$，
所以$\overline{FE}=\overline{AC}=7$（對應邊相等），
$\angle E=\angle C=50^\circ$（對應角相等）。

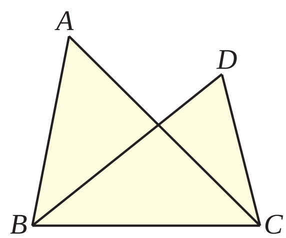
2 全等三角形的判別

美術老師請全班同學一起製作形狀、大小相同的三角形來拼貼布告欄的邊框。老師已先製作一個三角形，而三角形有三個邊、三個角，那麼老師至少應該提供三角形的哪些條件，同學才能做出與老師形狀、大小相同的三角形呢？以下為方便表示圖形的邊與角，我們將用記號 S 代表「邊（*Side*）」，A 代表「角（*Angle*）」。

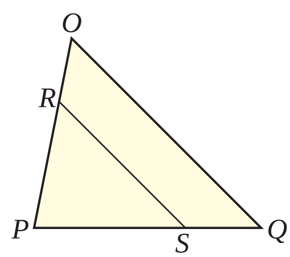


如果兩個三角形只有一個邊 (S) 或一個角 (A) 對應相等，那麼這兩個三角形是否一定會全等呢？

(1) 如右圖，已知$\triangle ABC$ 外有一點 D 點。連 $\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 後，發現雖然$\triangle ABC$ 與$\triangle DBC$ 的 $\overline{BC}$ 對應相等，但是$\triangle ABC$ 與$\triangle DBC$ 不全等。



(2) 如右圖，已知點 R、S 分別在$\triangle OPQ$ 的 $\overline{OP}$、$\overline{PQ}$ 上。連 $\overline{RS}$ 後，發現雖然$\triangle OPQ$ 與$\triangle RPS$ 的$\angle P$ 對應相等，但是$\triangle OPQ$ 與$\triangle RPS$ 不全等。



那麼改為兩個三角形分別有兩個邊（SS）或兩個角（AA）對應相等，則這兩個三角形是否一定會全等呢？

探索活動

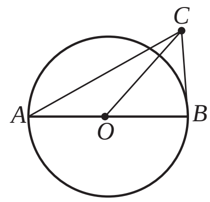
SS 與 AA 條件

(1) 如右圖，已知圓 O 外有一點 C 與直徑 $\overline{AB}$。

連 $\overline{AC}$、$\overline{CO}$、$\overline{BC}$，則在△AOC 與△BOC 中，

對應邊 $\overline{AO}$＝ $\overline{BO}$ ；$\overline{CO}$＝ $\overline{CO}$ ，

△AOC 與△BOC 是否全等？否。



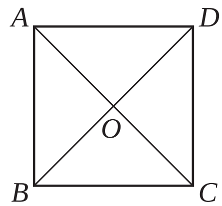
(2) 如右圖，已知正方形 $ABCD$ 的對角線交於 O 點。

則在△ABC 與△ABO 中，

對應角∠ABC＝ 90 度＝∠ AOB ；

∠ACB＝ 45 度＝∠ ABO ；（或 BAO）

△ABC 與△ABO 是否全等？否。



SSS 全等性質

如果一個三角形的三個邊長分別等於另一個三角形的三個邊長，那麼這兩個三角形是否會全等？

探索活動

SSS 尺規作圖

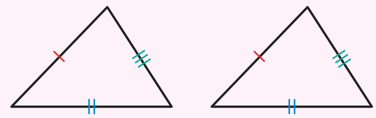
1. 已知△ABC 的三邊長如下圖，利用尺規作圖畫出△DEF，使其邊長分別為 a、b、c。

2. 拿出附件㈡△ABC 的透明片，檢驗△ABC 是否與△DEF 疊合？是。

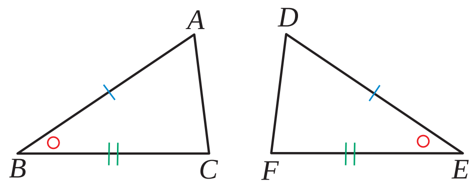
由前面的探索活動可知，在△*ABC* 與△*DEF* 中，若有三組邊分別對應相等，則△*ABC* ≅ △*DEF*，記為 *SSS* 全等性質，其中三個 *S* 表示有三組邊分別對應相等。

SSS 全等性質

若兩個三角形有三組邊分別對應相等，
則這兩個三角形全等。

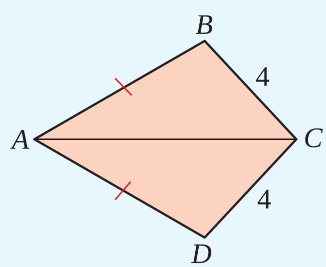


習慣上，符號「△*ABC* ≅ △*DEF*」只表示兩個三角形全等，不一定表示 *A* 點與 *D* 點是對應點、*B* 點與 *E* 點是對應點、*C* 點與 *F* 點是對應點。本書若未特別說明，是依照其對應順序來表示。如有需要，我們常用相同的記號來標示全等圖形的對應邊與對應角。如右圖△*ABC* ≅ △*DEF*，其中 $\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\angle B=\angle E$。



例 2　*SSS* 全等判別

根據右圖的標示說明△*ABC* ≅ △*ADC*，
並寫出對應角。



解　在△*ABC* 與△*ADC* 中，

因為 $\overline{AB}=\overline{AD}$，

$\overline{BC}=\overline{DC}=4$，

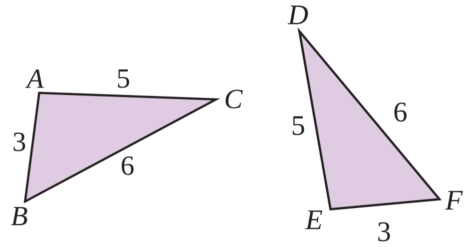
$\overline{AC}=\overline{AC}$（公用邊），

所以由 *SSS* 全等性質得知△*ABC* ≅ △*ADC*。

對應角 $\angle BAC=\angle DAC$，$\angle B=\angle D$，$\angle ACB=\angle ACD$。

隨堂練習

已知△*ABC*、△*EFD* 的邊長標示如右圖，試完成下列空格以說明△*ABC* ≅ △*EFD*，並寫出對應角。



在△*ABC* 與△*EFD* 中，

因為 $\overline{AB}$＝ $\overline{EF}$ ＝3，

$\overline{BC}$＝ $\overline{FD}$ ＝6，

$\overline{AC}$＝ $\overline{ED}$ ＝5，

所以由 *SSS* 全等性質得知△*ABC* ≅ △*EFD*。

對應角∠*A*＝ ∠*E* ，∠*B*＝ ∠*F* ，∠*C*＝ ∠*D* 。

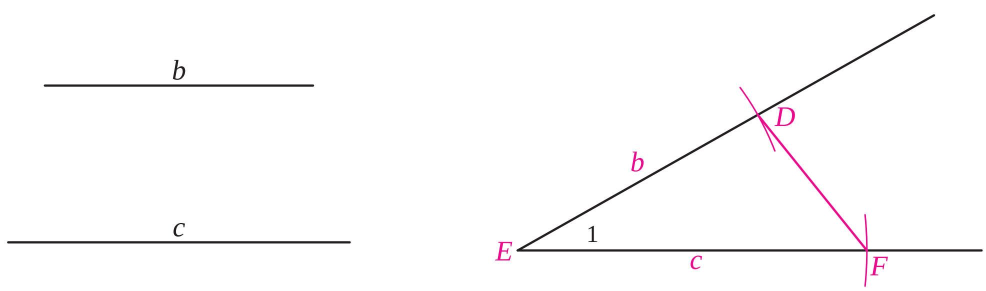
SAS 全等性質

在 *SSS* 全等性質中，如果將其中一邊改為另兩邊的夾角，也就是說如果一個三角形有兩邊及其夾角分別等於另一個三角形的兩邊及其夾角，那麼這兩個三角形是否也會全等？

探索活動

SAS 尺規作圖

1. 已知△*ABC* 的一角∠1 與兩夾邊 *b*、*c* 如下圖，利用尺規作圖在∠1 上畫出△*DEF*，使∠1 的兩夾邊分別為 *b*、*c*。

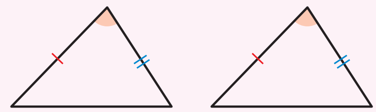


2. 拿出附件㈡△*ABC* 的透明片，檢驗△*ABC* 是否與△*DEF* 疊合？是。

由前面的探索活動可知，在△ABC 與△DEF 中，若有兩組邊及其夾角分別對應相等，則△$ABC \cong$ △DEF，記為 SAS 全等性質，其中兩個 S 表示有兩組邊分別對應相等，中間的 A 是指兩邊的夾角對應相等。

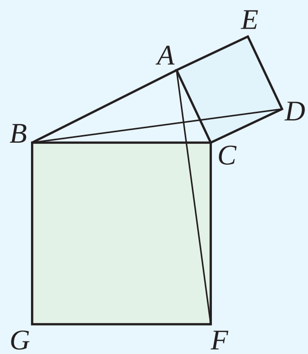
SAS 全等性質

若兩個三角形的兩邊及其夾角分別對應相等，
則這兩個三角形全等。



例 3 SAS 全等判別

如右圖，已知四邊形 $ACDE$ 與四邊形 $BGFC$ 皆為正方形。試說明△$AFC \cong$ △DBC，並寫出其餘的對應邊和對應角。



解 在△AFC 與△DBC 中，

因為 $\overline{AC}=\overline{DC}$（正方形 $ACDE$ 的邊長），

$\angle ACF=\angle DCB=\angle ACB+90^\circ$，

$\overline{FC}=\overline{BC}$（正方形 $BGFC$ 的邊長），

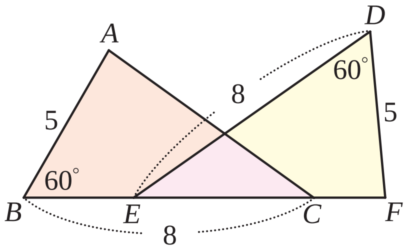
所以由 SAS 全等性質得知△$AFC \cong$ △DBC。

其餘的對應邊 $\overline{AF}=\overline{DB}$，

對應角 $\angle AFC=\angle DBC$，$\angle CAF=\angle CDB$。

隨堂練習

已知$\triangle ABC$、$\triangle FDE$的邊長、夾角標示如右圖，試完成以下空格以說明$\triangle ABC\cong\triangle FDE$，並寫出其餘的對應邊和對應角。



在$\triangle ABC$與$\triangle FDE$中，

因為 $\overline{AB}=$ $\underline{\overline{FD}}$ $=5$，

$\angle B=$ $\underline{\angle D}$ $=60^\circ$，

$\overline{BC}=$ $\underline{\overline{DE}}$ $=8$，

所以由 <u>SAS</u> 全等性質得知$\triangle ABC\cong\triangle FDE$。

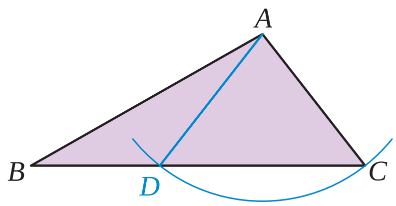
其餘的對應邊 $\overline{AC}=$ $\underline{\overline{FE}}$，

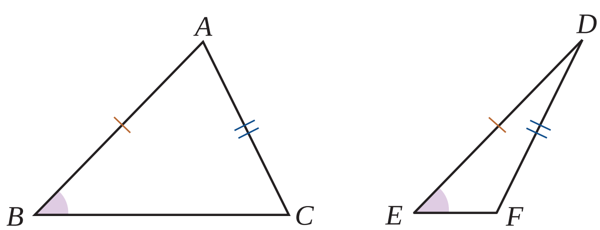
對應角$\angle A=$ $\underline{\angle F}$，$\angle ACB=$ $\underline{\angle FED}$。

在 *SAS* 全等性質中，如果將夾角改為其他的角，也就是說如果一個三角形有兩邊及其中一邊的對角分別等於另一個三角形的兩邊及其中一邊的對角，那麼這兩個三角形是否還會全等？

SSA 條件

如右圖，以 A 點為圓心，$\overline{AC}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則在$\triangle ABC$與$\triangle ABD$中，有兩組對應相等的邊 $\overline{AB}=\overline{AB}$，$\overline{AC}=\overline{AD}$，有一組對應相等的角$\angle B=\angle B$，但是$\triangle ABC$和$\triangle ABD$卻不全等。

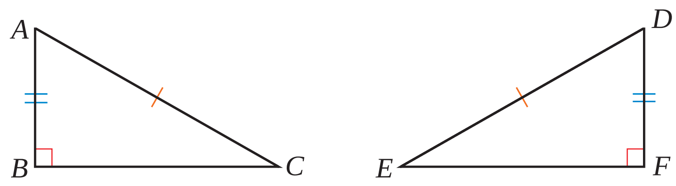




因此如上圖，當一個三角形有兩邊及其中一邊的對角分別與另一個三角形的兩邊及其中一邊的對角對應相等，這兩個三角形不一定會全等，也就是說 *SSA* 條件並不確保兩個三角形會全等。

RHS 全等性質

前面提到 *SSA* 條件雖無法確保兩個三角形會全等，但如果條件中的角換成是直角，也就是說如果一個直角三角形的斜邊與一股分別等於另一個直角三角形的斜邊與一股，那麼這兩個三角形是否會全等？



如上圖，在$\triangle ABC$ 與$\triangle DFE$ 中，

若$\angle B=\angle F=90^\circ$，$\overline{AB}=\overline{DF}$，$\overline{AC}=\overline{DE}$，

則由畢氏定理可知 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$，$\overline{DF}^2+\overline{FE}^2=\overline{DE}^2$。

因為　$\overline{AB}=\overline{DF}$，$\overline{AC}=\overline{DE}$

所以　$\overline{BC}^2=\overline{FE}^2$

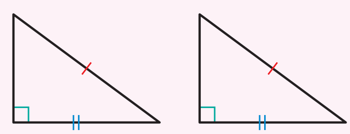
即　　$\overline{BC}=\overline{FE}$

故由 *SSS* 全等性質得知$\triangle ABC\cong\triangle DFE$。

由上述可知，若兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等，則這兩個直角三角形全等，記為 *RHS* 全等性質，其中 *R* 代表「直角（*Right angle*）」，*H* 代表「斜邊（*Hypotenuse*）」，*S* 代表「邊（*side*）」。

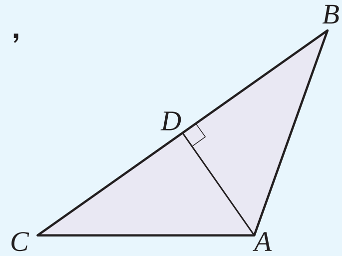
RHS 全等性質

若兩個直角三角形的斜邊和一股分別對應相等，
則這兩個直角三角形全等。



例 4　*RHS* 全等判別

如右圖，在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，試說明△$ABD\cong$△$ACD$。



解　在△ABD 和△ACD 中，

因為$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，

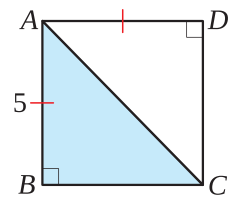
$\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{AD}=\overline{AD}$ (公用邊)，

所以由 *RHS* 全等性質得知△$ABD\cong$△ACD。

隨堂練習

根據右圖四邊形 $ABCD$ 的標示完成下列空格：



解 (1) 在△ABC 與△ADC 中，

因為 $\overline{AB}=$ __$\overline{AD}$__，

$\overline{AC}=$ __$\overline{AC}$__ (公用邊)，

$\angle B=$ __$\angle D$__ $=90^\circ$，

所以由 __*RHS*__ 全等性質得知△$ABC\cong$△ADC。

(2) 若$\angle BAC=42^\circ$，因為對應角$\angle BAC=$ __$\angle DAC$__ $=$ __42__ 度。

所以$\angle ACD=90^\circ-$ __$\angle DAC$__ $=$ __48__ 度。

(3) $\overline{CD}$ 與　□ $\overline{AD}$　☑ $\overline{CB}$　□ $\overline{BA}$　相等 (因為 __對應邊__ 相等)。

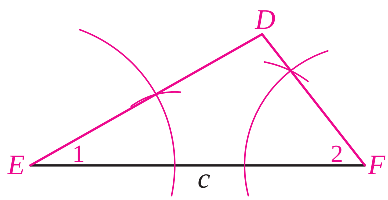
ASA 全等性質

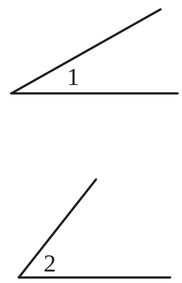
在 *SAS* 全等性質中，如果將兩個邊及其夾角改為兩個角及其夾邊，也就是說如果一個三角形有兩個角及其夾邊分別等於另一個三角形的兩個角及其夾邊，那麼這兩個三角形是否也會全等？

探索活動

ASA 尺規作圖

1. 已知△*ABC* 的兩角∠1、∠2 與其公用邊 *c* 如下圖，利用尺規作圖在 *c* 上畫出△*DEF*，使其內角分別與∠1、∠2 相同，且線段 *c* 為公用邊。



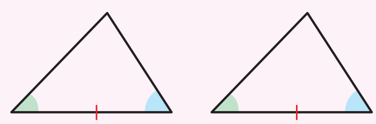


2. 拿出附件㈡△*ABC* 的透明片，檢驗△*ABC* 是否與△*DEF* 疊合？是。

由前面的探索活動可知：在△*ABC* 與△*DEF* 中，若有兩組角及其夾邊分別對應相等，則△*ABC* ≅ △*DEF*，記為 *ASA* 全等性質，其中兩個 *A* 表示兩組角分別對應相等，中間的 *S* 是指這兩組角的夾邊對應相等。

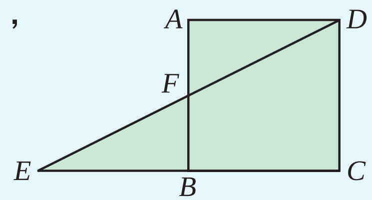
ASA 全等性質

若兩個三角形的兩角及其夾邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



例 5 ASA 全等判別

如右圖，在正方形 $ABCD$ 中，F 點是 $\overline{AB}$ 的中點，延長 $\overline{DF}$ 交 $\overline{CB}$ 的延長線於 E 點。試說明：



(1) $\triangle AFD \cong \triangle BFE$。

(2) $\triangle DEC$ 的面積與正方形 $ABCD$ 的面積相同。

解 (1) 在 $\triangle AFD$ 與 $\triangle BFE$ 中，

因為 $\angle AFD = \angle BFE$（對頂角相等），

$\overline{FA} = \overline{FB}$（$F$ 點是 $\overline{AB}$ 的中點），

$\angle FAD = \angle FBE = 90^\circ$，

所以由 ASA 全等性質得知 $\triangle AFD \cong \triangle BFE$。

(2) 由(1)可知 $\triangle AFD$ 的面積與 $\triangle BFE$ 的面積相同，

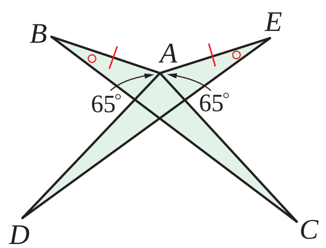
故 $\triangle DEC$ 的面積 $=$ $\triangle FBE$ 的面積 $+$ 梯形 $DFBC$ 的面積

$=$ $\triangle AFD$ 的面積 $+$ 梯形 $DFBC$ 的面積

$=$ 正方形 $ABCD$ 的面積

隨堂練習

根據右圖標示說明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$。



解 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AED$ 中，

因為 $\angle B =$ ___$\angle E$___，

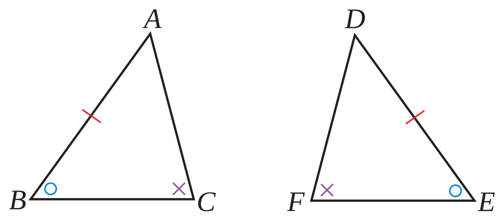
$\overline{AB} =$ ___$\overline{AE}$___，

$\angle BAC =$ ___$\angle EAD$___ $= 65^\circ + \angle DAC$，

所以由 ___ASA___ 全等性質得知 $\triangle ABC \cong \triangle AED$。

AAS 全等性質

在 *ASA* 全等性質中，如果將兩個角及其夾邊改為兩個角及其一對邊，也就是說如果一個三角形有兩個角及其一對邊分別等於另一個三角形的兩個角及其一對邊，那麼這兩個三角形是否也會全等？



如上圖，在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中，

若$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，$\overline{AB}=\overline{DE}$，

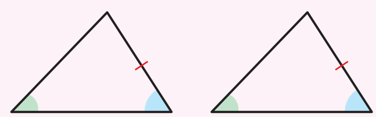
因為$\angle A+\angle B+\angle C=\angle D+\angle E+\angle F=180^\circ$（三角形內角和），

所以$\angle A=\angle D$，故由 *ASA* 全等性質得知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$。

我們將上述條件記為 *AAS* 全等性質，其中兩個 *A* 是指兩組角對應相等，*S* 是指其一對邊對應相等。

AAS 全等性質

若兩個三角形的兩個角和其一對邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。

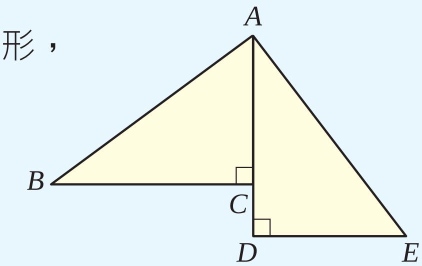


例 6　*AAS* 全等判別

如右圖，已知△ABC 和△EAD 皆為直角三角形，且∠B＝∠DAE、$\overline{AC}$＝$\overline{ED}$，試說明：

(1) △$ABC \cong$ △EAD。

(2) 若連 $\overline{BE}$，則△ABE 為等腰直角三角形。



解

(1) 在△ABC 和△EAD 中，

因為∠ACB＝∠EDA＝90°（直角三角形），∠B＝∠DAE，$\overline{AC}$＝$\overline{ED}$，

所以由 *AAS* 全等性質得知△$ABC \cong$ △EAD。

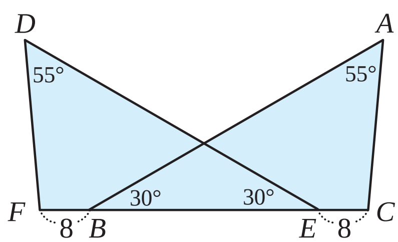
(2) 由(1)可知對應邊 $\overline{AB}$＝$\overline{AE}$，對應角∠BAC＝∠E，因為∠DAE 與∠E 互餘，

所以 ∠BAE＝∠BAC＋∠DAE＝∠E＋∠DAE＝90°，

故△ABE 為等腰直角三角形。

隨堂練習

根據右圖的標示說明△$ABC \cong$ △DEF。



解

在△ABC 與△DEF 中，

因為∠ABC＝ ∠DEF ＝30°，

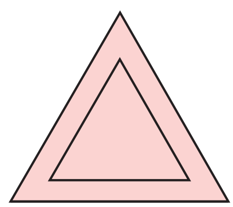
∠A＝ ∠D ＝55°，

$\overline{BC}$＝$\overline{BE}$＋8＝ $\overline{EF}$ ，

所以由 *AAS* 全等性質得知△$ABC \cong$ △DEF。

AAA 條件

如右圖，任取兩個正三角形，發現有三組角對應相等，但大小卻不一定相等。因此當兩個三角形符合 *AAA* 條件時，這兩個三角形不一定會全等。



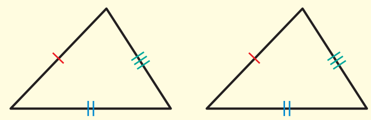
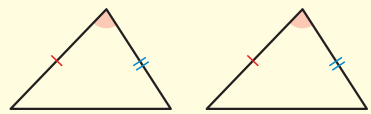
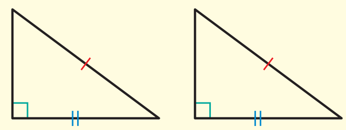
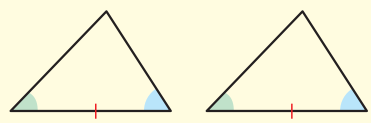
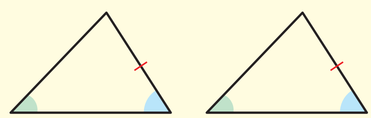
綜合本節的討論，只要給定三角形 *SSS*、*SAS*、*RHS*、*ASA* 或 *AAS* 全等性質中的任何一組條件，即可作出全等三角形。

3-3 重點整理

1 三角形全等

若△ABC 經過平移、旋轉或翻轉之後會與△DEF 完全疊合，記作△$ABC \cong$ △DEF，其對應邊相等、對應角相等。

2 全等三角形的判別

全等性質	判別條件	對應圖示
SSS	有三邊分別對應相等	
SAS	有兩邊及其夾角分別對應相等	
RHS	兩個直角三角形的斜邊與一股分別對應相等	
ASA	有兩角及其夾邊分別對應相等	
AAS	有兩角和其中一角的對邊分別對應相等	

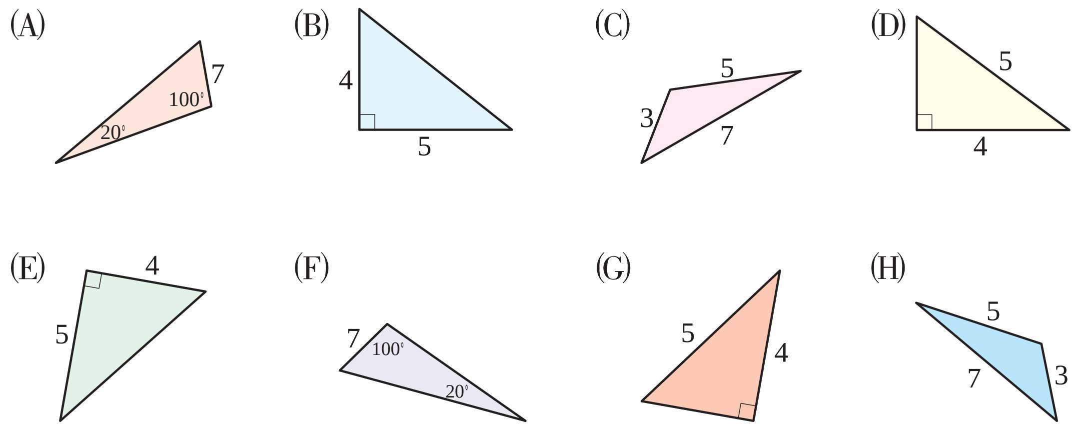
SSA 條件或 *AAA* 條件則不一定會全等。

3-3 自我評量

P.116 課文 P.118 課文 P.119 課文 P.120 課文 P.122 課文 P.124 課文 P.125 課文

1 從下列圖(A)～(H)中，找出全等的三角形，並連接其判別條件。

（每格 **6** 分/每條 **5** 分）



(A) 和____(F)____全等 •

(B) 和____(E)____全等 •

(C) 和____(H)____全等 •

(D) 和____(G)____全等 •

• *SSS*

• *SAS*

• *SSA*

• *RHS*

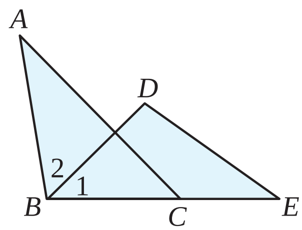
• *AAS*

• *ASA*

• *AAA*

P.116 例 2

2 如右圖，已知 $\overline{AC}=\overline{EB}$，$\overline{AB}=\overline{ED}$，$\overline{BC}=\overline{DB}$，試說明：（**6** 分）



(1) $\triangle ABC \cong \triangle EDB$。

解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

已知 $\overline{AC}=\overline{EB}$，

$\overline{AB}=\overline{ED}$，

$\overline{BC}=\overline{DB}$，

由 ___*SSS*___ 全等性質得知 $\triangle ABC \cong \triangle EDB$。

(2) 若 $\angle E=35^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，求 $\angle 2$ 的度數。（**10** 分）

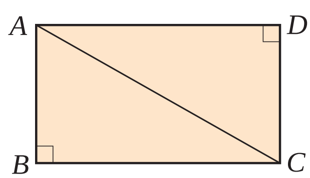
因為對應角 $\angle ACB=\angle 1$，$\angle ABC=\angle D$，

又 $\angle ABC=\angle 1+\angle 2$，$\angle D+\angle 1+\angle E=180^\circ$，

$\angle D=180^\circ-45^\circ-35^\circ=100^\circ$，所以 $\angle 2=100^\circ-45^\circ=55^\circ$。

P.125 例 6

3 已知長方形色紙 $ABCD$ 如右圖，大寶沿其對角線 $\overline{AC}$ 對摺，設 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 交於 P 點，試說明：（每格 **6** 分）



(1) $\triangle ABP \cong \triangle CDP$。

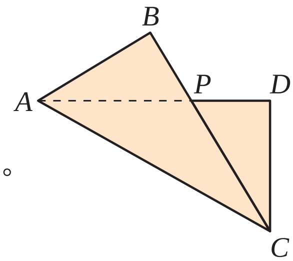
解：在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CDP$ 中，

因為 $\overline{AB}=$ ___$\overline{CD}$___（長方形對邊相等），

$\angle B=\angle$ ___D___ $=90^\circ$（長方形內角），

$\angle APB=\angle$ ___CPD___（對頂角相等），

所以由 ___*AAS*___ 全等性質得知 $\triangle ABP \cong \triangle CDP$。



(2) $\triangle ACP$ 為等腰三角形。

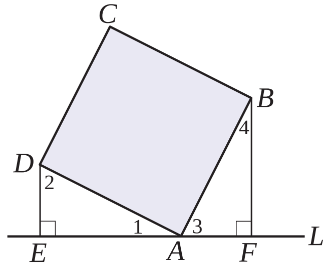
解：在 $\triangle ACP$ 中，

由(1)可知 $\overline{AP}=$ ___$\overline{CP}$___（對應邊相等），

故 $\triangle ACP$ 為等腰三角形。

P.123 例 5　P.125 例 6

4 如右圖，已知正方形 $ABCD$ 的頂點 A 在直線 L 上，且 $\overline{DE}$、$\overline{BF}$ 分別垂直 L 於 E、F 兩點，則下列何者為正確的推論？（10 分）



浩南說：因為 $\overline{DA}=\overline{AB}$（四邊形 $ABCD$ 為正方形），

$\angle E=\angle F=90^\circ$（$\overline{DE}\perp L$，$\overline{BF}\perp L$），

$\angle 2=\angle 3$（$\angle 1$ 的餘角），

所以由 AAS 全等性質可知$\triangle ADE\cong\triangle BAF$。

依霖說：因為 $\overline{DA}=\overline{AB}$（四邊形 $ABCD$ 為正方形），

$\angle 2=\angle 3$（$\angle 1$ 的餘角），

$\angle 1=\angle 4$（$\angle 3$ 的餘角），

所以由 ASA 全等性質可知$\triangle ADE\cong\triangle BAF$。

答：兩人都正確。