1

極限與函數

1-1 數列及其極限

配合課本 P.2~P.7

主題 1 數列的極限

1. 數列可分為有限數列與無窮數列

其中項數有限項者，稱為有限數列；而項數無窮多項者，稱為無窮數列。

而無窮數列記為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 或 $\langle a_n \rangle$。

2. 數列的極限

給定無窮數列 $\langle a_n \rangle$：

(1)收斂數列

當 n 越來越大時，若 a_n 會趨近於一數值 L 時，則稱其為收斂數列，

此趨近值稱為此數列之極限，記為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。

(2)發散數列

當 n 越來越大時，若 a_n 不會趨近於一個定值，則稱其為發散數列。

3. 數列 $\langle r^n \rangle$ 的收斂與發散

無窮數列 $\langle r^n \rangle$ 的斂散性：$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{發散, 若 } r \le -1 \\ 0\ \ \text{, 若 } -1 < r < 1 \\ 1\ \ \text{, 若 } r = 1 \\ \text{發散, 若 } r > 1 \end{cases}$。

配合課本例題 1

數列的收斂及其極限 1

例題 1

下列各數列是否收斂？若為收斂，其極限為何？

(1) $\langle \frac{1}{n+2} \rangle$。 (2) $\langle \frac{7}{4} \rangle$。 (3) $\langle \frac{2n+1}{n+1} \rangle$。

(4) $\langle (-\frac{1}{2})^n \rangle$。

解

練習 1

下列各數列是否收斂？若為收斂，其極限為何？

(1) $\langle \frac{1}{n^2+1} \rangle$。 (2) $\langle \sqrt{2} \rangle$。 (3) $\langle \frac{n}{n+1} \rangle$。

(4) $\langle (1.99)^n \rangle$。

解

配合課本例題 2

數列的收斂及其極限 2

例題 2

下列各數列是否收斂？若為收斂，其極限為何？

(1) $\langle (0.5)^n \rangle$。 (2) $\langle (-2.001)^n \rangle$。

(3) $\langle (-\frac{4}{9})^n \rangle$。

解

練習 2

下列各數列是否收斂？若為收斂，其極限為何？

(1) $\langle (-0.999)^n \rangle$。 (2) $\langle (1.999)^n \rangle$。

(3) $\langle \frac{(-5)^n}{7^n} \rangle$。

解

主題 2　數列極限的運算性質

配合課本 P.8~P.11

設數列 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 皆為收斂的無窮數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$、$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL$，其中 k 為一常數。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L - M$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = L \cdot M$。

(5)若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 且 $M \neq 0$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$。

配合課本例題 3

數列極限運算的性質 I

例題 3

試求下列各數列的極限：

(1) $\langle\frac{5^{n+1}}{6^n}\rangle$。 (2) $\langle 2+(\frac{3}{4})^n\rangle$。

(3) $\langle 4-\frac{3}{2n}+\frac{n}{n+1}\rangle$。 (4) $\langle\frac{3}{2n}\cdot(\frac{1}{2})^n\rangle$。

解

練習 3

試求下列各數列的極限：

(1) $\langle\frac{4^{n+1}}{3^{2n}}\rangle$。 (2) $\langle -1+\frac{5}{4n+1}\rangle$。

(3) $\langle(3-\frac{5}{n})\cdot(\frac{2n}{3n+1})\rangle$。 (4) $\langle\frac{7+\frac{3}{n+5}}{2-(\frac{2}{3})^n}\rangle$。

解

配合課本例題 4

數列極限運算的性質 2

例題 4

試求下列各式的極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{999n^2+5}{-n^2+300n}$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5000n^2+9999n}{n^3-n^2-5}$。

解

練習 4

試求下列各式的極限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{n^2+3}$。 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2}{2n^3+n^2-5}$。

解

1

配合課本 P.12~P.18

主題 3 "Σ" 符號與無窮級數和

1. 數列由有限多項 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 所組成稱為有限數列。

   數列由無窮多項 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 所組成稱為無窮數列。

2. 將數列各項用加號連接起來可以得到級數：

   $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 由有限多項所組成稱為有限級數。

   $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ 由無窮多項所組成稱為無窮級數。

3. "Σ" 念作 "sigma"，有連加的意義。

   此符號用於數列的項數間連加的總和，

   此符號的下方的數字所表示為連加數列中的起始項次，

   此符號的上方的數字所表示為連加數列中的結束項次。

   有限級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

   無窮級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$。

4. **常見的級數公式**

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

   (3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2$。

5. **有限級數的運算性質**

   給定有限數列 $\langle a_k\rangle$、$\langle b_k\rangle$、c 為常數，則

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$。　(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}ca_k=c\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$。

6. **無窮級數之和**

   由無窮數列所加總稱為無窮級數。

   給定無窮級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 為前 n 項和。

   (1)若無窮數列 $\langle S_n\rangle$ 收斂且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，稱此為收斂級數而其和為 S。

   (2)若無窮數列 $\langle S_n\rangle$ 發散，稱此為發散級數而其和不存在。

配合課本例題 5

"Σ" 符號的意義 1

例題 5

試將下列各式寫成下列級數形式（即用加號連接形式），不需化簡：

(1) $\sum_{k=1}^{4}(k^2+1)^3$。 (2) $\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k(k+1)}$。

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{3}{2})^k$。

解

練習 5

試將下列各式寫成下列級數形式（即用加號連接形式），不需化簡：

(1) $\sum_{k=1}^{5}(3^k+2k)$。 (2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(2k+1)}$。

解

配合課本例題 6

"Σ" 符號的意義 2

例題 6

試將下列各級數寫成"Σ"符號形式表示：

(1) $1\times 20+2\times 19+3\times 18+\cdots+20\times 1$。

(2) $\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^5}+\frac{2^4}{3^7}+\cdots+\frac{2^{10}}{3^{19}}$。

解

練習 6

試將下列各級數寫成"Σ"符號形式表示：

(1) $2\times 3^1+2\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+2\times 3^{10}$。

(2) $\frac{1+2^1}{7}+\frac{1+2^3}{7^2}+\frac{1+2^5}{7^3}+\frac{1+2^7}{7^4}+\cdots+\frac{1+2^{19}}{7^{10}}$。

解

配合課本例題 7

級數公式與有限級數的運算性質

例題 7

試求

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots$ 至第 n 項之和。

(2) $3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2$。

解

練習 7

試求 $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$。

解

配合課本例題 8

無窮級數之斂散性

例題 8

試求下列各級數前 n 項之和，並判斷級數是否收斂。若為收斂，則求出其和。

(1) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots$。

(2) $(\frac{2}{3})^1+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3+\cdots$。

解

練習 8

試求無窮級數 $1+(\frac{1}{4})+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\cdots$ 前 n 項之和，並判斷級數是否收斂。若為收斂，則求出其和。

解

配合課本 P.19~P.25

主題 4 無窮等比級數

1. 等比級數

將等比數列中某兩項間所有的項（含前後之此兩項）連加的總和。

(1)設首項為 a，公比為 r，一般項 $a_n=ar^{n-1}$，前 n 項總和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$。

(2)令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$

$=a(1+r+r^2+\cdots+r^{n-1})$

則 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$（當 $r\neq1$）或 na（當 $r=1$）。

2. 無窮等比級數

當 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}$

則稱此為以首項為 a、公比為 r 的無窮等比級數，

依據公比 r 的範圍討論此無窮等比級數的斂散性質。

(1)當 $-1<r<1$ 且 $r\neq0$ 時，則 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1+a_2+\cdots=a+ar+ar^2+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$。

(2)當 $r\leq-1$ 或 $r\geq1$ 時，則 $\langle S_n\rangle$ 發散，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1+a_2+\cdots$ 不存在。

3. 循環小數與無窮等比級數

將循環小數化成多組有規律的無窮等比級數，再以無窮等比級數公式代入。

配合課本例題 9

無窮等比級數之斂散性

例題9

試判斷下列各無窮級數是否收斂？若為收斂，其和為何？

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}3^k$。 (2) $\sum_{k=1}^{\infty}(5\cdot 0.1^k)$。 (3) $8+8+8+\cdots$。

解

練習9

試判斷下列各無窮級數是否收斂？若為收斂，其和為何？

(1) $5-5+5-5+5-5+\cdots$。

(2) $7+7\times 0.6+7\times 0.36+\cdots+7\times 0.6^n+\cdots$。

解

無窮等比級數之應用

配合課本例題 10

例題 10

小華、小明兩人輪流投擲兩顆公正的骰子，約定如下：

若擲出兩顆骰子的點數不同，則改由另一人投擲，直到擲出兩顆骰子點數相同時，即停止投擲。

現由小華先投擲，試求小華先擲出相同點數的機率。

解

練習 10

有一個皮球自離地面 16 公尺高的窗口落下，此球每次反彈的高度為前一次落下時的 $\frac{3}{5}$，則此球離開窗口起算至靜止於地面為止，總共的運動距離為多少公尺？

解

配合課本例題 11

運用無窮等比級數化簡循環小數

例題 11

試將下列循環小數化簡為分數。

(1) $0.\overline{234}$。 (2) $0.4\overline{56}$。 (3) $0.78\overline{9}$。

解

練習 11

試將下列循環小數化簡為分數。

(1) $0.\overline{23}$。 (2) $0.9\overline{5}$。

解

1

1-1 自我評量

基礎題

1.判斷下列各數列是否收斂。若收斂，試求其極限。

(1) $\langle\frac{2n^3-1}{n^3}\rangle$。 (2) $\langle(\frac{4}{7})^n\rangle$。 (3) $\langle\pi\rangle$。 〔配合例題 8〕

2.數列 $\langle a_n\rangle$ 為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{5a_n+1}=2$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 之值。 〔配合主題 2〕

3.________試選出正確的選項。

(A)若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2n}=0.1$

(B)若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n{}^2)=0.01$

(C)若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n{}^2)=0.01$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.1$

(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.1$，則數列 $\langle b_n\rangle$ 中必有無限多項為正數 〔配合主題 2〕

4.設 x 為實數，

(1)若 $\langle\frac{7(x-1)^n}{(3x)^n}\rangle$ 收斂，試求 x 的範圍。 (2)若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(7\cdot\frac{(x-1)^n}{(3x)^n})=14$，試求 x 之值。

〔配合例題 2〕

5.試求下列級數的和：

(1) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+n\cdot 1=$____________。

(2) $1\cdot 20+2\cdot 19+3\cdot 18+\cdots\cdots+20\cdot 1=$________。 〔配合例題 7〕

6. 等比數列 $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$則

(1)其第 20 項為________。(2)加到第 20 項的總和為____________。

〔配合主題 4〕

7. 試求 (1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{8}-\frac{1}{81}+\cdots$ 之值。 (2) $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\cdots$ 之值。

〔配合例題 9〕

8. 一皮球自高度 20 公尺自由落下，設每次反彈高度為前一次反彈高度的一半，則自開始落下至停止為止，此皮球所經過之距離為何？ 〔配合例題 10〕

9. 試求無窮級數 $0.7+0.077+0.00777+0.0007777+\cdots$ 之值。 〔配合例題 9〕

10. 將下列各數化為最簡分數： (1) $0.\overline{913}$。 (2) $0.9\overline{19}$。 (3) $0.0\overline{0123}$。 〔配合例題 11〕

進階題

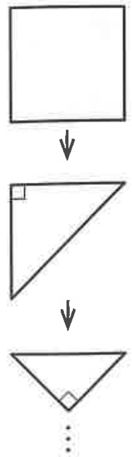
11. 設 a、b 是實數且 $\lim\limits_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}=-\frac{4}{3}$，則數對 (a, b) 為何？ 〔配合例題 4〕

12.如圖(一)邊長為 2 的正方形，沿著對角線摺出一個等腰直角三角形如圖(二)，再由圖(二)斜邊之高作折線，折出一個等腰直角三角形，如圖(三)，一直沿著每個等腰直角三角形之高折下去，若 a_n 表示圖（n）的面積，而 b_n 表示圖（$n+1$）之等腰三角形的斜邊，試求

(1) $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$。 (2) $b_1+b_2+\cdots b_n$。

(3)若 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 且 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，

則滿足 $|S-S_n|\leq\dfrac{1}{1000}$ 的最小自然數 n 為何？ 〔配合例題 10〕



13.試求下列之值：

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+1)}$。 (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}$。 (3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$。 (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$。 〔配合例題 7〕

14.試求下列級數的和：

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{5}(2i+j))=$ ______。 (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(\sum_{j=1}^{3}(2i+j))=$ ______。 (3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(\sum_{j=1}^{3}(i+2j))=$ ______。

〔配合主題 3〕

15.有一隻電子鼠的路徑被設定如下：

「自原點 (0, 0) 出發走至點 $A_1(10, 0)$，接著左轉 90° 走到點 $A_2(10, 5)$，再左轉 90° 再走到 $A_3(\frac{15}{2}, 5)$，…，每次走了前次距離之半後就左轉 90° 直線前進」，當 $n\to\infty$ 時，試問坐標位於何處？ 〔配合例題 10〕

1-2　函數與函數圖形的性質

配合課本 P.29~P.32

主題 1　函數的定義及函數的圖形

1. 函數的定義

對於每一個 x 的變量中存有唯一的對應 y 值，寫成 $y=f(x)$。

討論此兩變量之間的對應關係，即稱為「y 為 x 的函數」，在上述的函數之中，

x 稱為自變數，y 稱為應變數。

2. 以集合的角度定義函數

設 A、$B\neq\varnothing$，若規定某種對應關係 f，使 A 中的每一元素都對應到 B 中的某個元素，則稱「f 為由 A 至 B 的函數」，記做 $f:A\to B$。

3. 定義域與值域

自變數的範圍稱為函數的定義域，應變數的範圍稱為函數的值域。

4. 函數的圖形

給定實函數 $f:A\to\mathbb{R}$ 時，坐標平面上所有滿足 $x\in A$ 的點 $(x,f(x))$ 所構成的圖形，稱為函數 $f(x)$ 的圖形。在定義域中任意實數，其鉛垂線與函數圖形恰有一個交點。

定義域與值域

配合課本例題 1

例題 1

試求下列各函數的定義域與值域。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$。　(2) $g(x)=\sqrt{9-x^2}$。

解

練習 1

試求下列各函數的定義域與值域。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$。　(2) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$。

解

主題 2　常見的重要函數及其圖形

配合課本 P.33~P.37

1. 根式函數 $f(x)=\sqrt{x}$

根式函數 $f(x)=\sqrt{x}$，定義域為 $\{x\mid x\geq 0,\ x\in\mathbb{R}\}$，值域為 $\{y\mid y\geq 0,\ y\in\mathbb{R}\}$。

2. 有理函數 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

若兩多項函數 $f(x)$、$g(x)$ 且 $g(x)\neq 0$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的函數稱之為有理函數。

3. 分段定義函數

有些函數在不同區間中以不同函數表示，稱為分段定義函數。

4. 高斯函數

對於任意實數 x，$[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，$[\ ]$ 稱為高斯符號。

若 $f(x)=[x]$，則稱 $f(x)$ 為高斯函數。

配合課本例題 2

分段函數

例題 2

試將 $f(x)=|x-3|$ 表示成分段函數，並描繪其圖形。

解

練習 2

試描繪 $f(x)=\begin{cases}x-3,\ x\geq 0\\ -x+1,\ x<0\end{cases}$ 並求 $f(1)$ 及 $f(-1)$。

解

高斯函數

配合課本例題 3

例題3

試描繪函數 $f(x)=[2x]$ 的圖形。

解

練習3

試描繪函數 $f(x)=[\frac{x}{2}]$ 的圖形。

解

高斯函數的應用

配合課本例題 4

例題 4

某電瓶的電量格共有 8 格，其中充滿電時空格 0 格。今作測試，若以空電瓶開始，當充電 x 小時時，其空格為 $8-[\frac{x}{0.5}]$ 格，試求

(1)充 2.5 小時，空格剩多少格？

(2)空格剩 2 格時，充電時間約為何？(範圍)

解

練習 4

承例題 4 此電瓶充電，試問

(1)充 3.25 小時，滿格有多少格？

(2)若想充滿 8 格，至少充電多少小時？

解

主題 3　函數的四則運算與合成函數

配合課本 P.37~P.40

1. 函數的四則運算

設兩個實函數 $f(x)$、$g(x)$ 且 $f(x)$ 的定義域為 A，$g(x)$ 的定義域為 B，則

(1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ 其定義域為 $A\cap B$。

(2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ 其定義域為 $A\cap B$。

(3) $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ 其定義域為 $A\cap B$。

(4) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ 其定義域為 $\{x\,|\,x\in A\cap B,\ g(x)\neq 0\}$。

2. 合成函數

設兩函數 $f:A\to B$、$g:B\to C$，稱 $g\circ f:A\to C$ 為 f 與 g 的合成函數，即

$g\circ f(x)=g(f(x))$。

例如：設 $f(x)=3x+1$、$g(x)=-x$，則 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+1)=-(3x+1)$。

函數的四則運算

配合課本例題 5

例題 5

已知函數 $f(x)=\log x+3$、$g(x)=\sqrt{4-x^2}$，試求出下列各函數及其定義域：

(1) $(f+g)(x)$。 (2) $(f-g)(x)$。

(3) $(f\cdot g)(x)$。 (4) $(\frac{f}{g})(x)$。

解

練習 5

已知函數 $f(x)=x+3$、$g(x)=\sqrt{2x-4}$，試求出下列各函數及其定義域：

(1) $(f+g)(x)$。 (2) $(f-g)(x)$。

(3) $(f\cdot g)(x)$。 (4) $(\frac{f}{g})(x)$。

解

合成函數

配合課本例題 6

例題 6

已知函數 $f(x)=x+1$、$g(x)=\sqrt{x^2-4}$，試求出下列各函數。

(1) $(f\circ g)(x)$。 (2) $(g\circ f)(x)$。

解

練習 6

已知函數 $f(x)=x^2+3$、$g(x)=\frac{3}{x}$，試求出下列各函數。

(1) $(f\circ g)(x)$。 (2) $(g\circ f)(x)$。

解

配合課本 P.41~P.42

主題 4　函數圖形的對稱關係

設實函數 $f(x)$ 且 $f(x)$ 的定義域為 A，

	定義	特性
奇函數	對於 A 中的 x 均滿足，$f(-x)=-f(x)$	圖形對稱於原點
偶函數	對於 A 中的 x 均滿足，$f(-x)=f(x)$	圖形對稱於 y 軸

奇函數與偶函數

配合課本例題 7

例題 7

試判斷下列各函數何者為奇函數？何者為偶函數？

(1) $f_1(x)=3x^4$。　(2) $f_2(x)=4x^3+6$。

(3) $f_3(x)=2\sin x$。　(4) $f_4(x)=6^x$。

解

練習 7

試判斷下列各函數何者為奇函數？何者為偶函數？

(1) $f_1(x)=|-2x|$。　(2) $f_2(x)=x^4-5$。

(3) $f_3(x)=2x-7$。　(4) $f_4(x)=\dfrac{1}{x}$。

解

1–2　自我評量

基礎題

1. ______ 關於函數 $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}+\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}\right|$ 的敘述，試選出正確的選項。(多選)

(A)點 $(0, 4)$ 在 $y=f(x)$ 的圖形上

(B) $y=f(x)$ 的定義域為 $\{x \mid x\neq -1,\ x\in\mathbb{R}\}$

(C) $y=f(x)$ 的值域為 $\{y \mid y\geq 4,\ y\in\mathbb{R}\}$

(D)水平線 $y=4$ 與 $y=f(x)$ 的圖形恰有兩個交點　〔配合主題 1〕

2. 試求下列各函數的定義域與值域：

(1) $f(x)=\left|\dfrac{1}{x-5}\right|$。　(2) $g(x)=\sqrt{x^2-x+1}$。　〔配合例題 1〕

3. 已知一次多項函數 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x+1$，$f(f(x))=f\circ f(x)$，則 $f\circ f(1)$ 之值。　〔配合例題 6〕

4. 已知 $f(x)=2x+1$、$g(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$，試求　(1) $f\circ g(2)$。　(2) $f\circ g(1)$。　〔配合例題 6〕

5. 已知 $f(x)=\begin{cases} x+3,\ x>0 \\ -1,\ x=0 \\ x^2+x+5,\ x<0 \end{cases}$，試求　(1) $f(-1)+f(0)+f(1)$。　(2) $f(f(-1))$。

〔配合主題 2、3〕

6.若 $f(x)=x^2-x+1$，$f(x)=g(x+1)$，則 (1) $g(x)=?$ (2) $g(7)=?$ 〔配合主題 1〕

7.函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+2)=f(x)$，且 $f(2)=2$、$f(3)=3$，試求 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$ 之值。 〔配合主題 2〕

8.設函數 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<1\\ 3x^2, & 1\le x<2\\ 2x^3-1, & 2\le x<3\end{cases}$，且 $f(x)=f(x+4)$，試求下列之值。

(1) $f(0)$。 (2) $f(\sqrt{3})$。 (3) $f(\sqrt{5})$。 (4) $f(5)$。 (5) $f(15)$。 〔配合主題 2〕

9.高斯符號的定義為：$[x]$ 表「不大於（小於或等於）x 之整數中最大的一個整數」，則 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{25}]$。 〔配合例題 3〕

10.已知函數 $f(x)=[x]+[\frac{1}{2}+x]$，試求 $(f\circ f)(\frac{9}{2})$ 之值。 〔配合主題 2、3〕

進階題

11.＿＿＿＿設 f 為一函數，若 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數；若 $f(-x)=f(x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數，則下列哪些為奇函數？(多選)

(A) $f(x)=4x$　(B) $f(x)=-3^x$　(C) $f(x)=-\sin x$　(D) $f(x)=7^{-x}-7^x$

(E) $f(x)=\log x$　〔配合例題 7〕

12.二次函數 $f(x)=x^2+ax+b$，其中 $a, b\in\mathbb{R}$，若 $f(1)=5$ 且 $f(f(1))=41$，則數對 (a, b) 為何？〔配合主題 3〕

13.設函數 $f(\frac{2-x}{x+1})=\frac{3x-2}{x-1}$，試求 (1) $f(x)$。 (2) $f(3)$。〔配合主題 1〕

14.手機剩餘電量經常用手機上電量剩餘的格子數來顯示，今有一款手機當充滿電時，螢幕的電量顯示為 6 格。設在待機 x 小時後，剩餘電量的顯示格數為 $f(x)=[\frac{100}{x+15}]$ 格，其中符號 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，試問

(1)待機 6 小時後，顯示剩餘電量的格子數？

(2)若剩餘電量的顯示格子數為兩格時，待機時間的範圍為何？〔配合例題 4〕

15.設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x)-3f(\frac{1}{x})=2x$，試求 $f(x)$。〔配合主題 1〕

1-3 函數的極限

配合課本 P.46~P.53

主題 1 函數在實數 a 的極限與左極限右極限

1. 函數 $f(x)$ 在實數 a 的極限

當 x 趨近於 a 時，若其對應的函數值 $f(x)$ 趨近於一個實數 L，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限為 L，記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$。

2. 函數在實數 a 的左極限與右極限存在的定義

(1)左極限

當 x 從左側 $(x<a)$ 趨近於 a 時，若其對應的函數值 $f(x)$ 趨近於某一定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的左極限，記為 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$。

(2)右極限

當 x 從右側 $(x>a)$ 趨近於 a 時，若其對應的函數值 $f(x)$ 趨近於某一定值 L，則稱 L 為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的右極限，記為 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。

3. 若函數 $f(x)$ 在實數 a 的極限存在，且其值為 L 時，

則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$。

注意　當以下之中至少有一點發生時，$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 就不存在。

(1)左極限或右極限不存在。 (2)左極限與右極限雖然存在，但是不相等。

配合課本例題 1

函數極限的基本定義

例題 1

已知函數 $f(x)=\sqrt[3]{x}-2$，試求 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{f(x)}{x-8}$ 之值。

解

練習 1

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+3x-4}{x-1}=5$，試求

(1) a 值。 (2) $f(8)$。

解

配合課本例題 2

分段函數極限

例題 2

試求下列各函數在 $x=1$ 時的極限。

(1) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geq 1\\ x^2, & x<1\end{cases}$。

(2) $g(x)=\begin{cases}3x+2, & x\geq 1\\ 2x^2, & x<1\end{cases}$。

(3) $h(x)=\begin{cases}[x], & x\geq 1\\ [x+1], & x<1\end{cases}$。

解

練習 2

試求下列各函數在 $x=2$ 時的極限。

(1) $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\geq 2\\ -x^2, & x<2\end{cases}$。

(2) $g(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 2\\ 2x, & x<2\end{cases}$。

(3) $h(x)=\begin{cases}[2x], & x>2\\ 3, & x=2\\ [2x+1], & x<2\end{cases}$。

解

1

配合課本例題 3

函數極限與左右極限

例題 3

設函數 $f(x)=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$，試回答下列問題：

(1)求 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 之值。 (2)求 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 之值。

(3)說明 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 是否存在。

解

練習 3

設函數 $f(x)=\dfrac{[x]}{x^2+1}$，試回答下列問題：

(1)求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 之值。 (2)求 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 之值。

(3)說明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在。

解

主題 2 極限的運算性質與有理函數極限

配合課本 P.54~P.58

1. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$、$\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ 且 r 為實數，則：

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$。

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-M$。

(3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\cdot M$。

(4)若 $M\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$。

(5) $\lim\limits_{x\to a} rf(x)=rL$。

2. 多項式函數的極限

設多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$。

即 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限等於 $f(x)$ 在 $x=a$ 的函數值。

3. 有理函數極限的處理原則

(1)若 $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$，由極限的性質可得知 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$。

(2)若 $\lim_{x\to a} g(x)=0$ 且 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\neq 0$，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的極限不存在。

(3)若 $g(a)=f(a)=0$，由因式定理可得知 $x-a\mid f(x)$、$x-a\mid g(x)$。

$\Rightarrow f(x)=(x-a)f_1(x)$、$g(x)=(x-a)g_2(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} g_1(x)}$，其中 $\lim_{x\to a} g_1(x)\neq 0$。

配合課本例題 4

極限的運算性質

例題 4

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim_{x\to 5}(x-5)$。 (2) $\lim_{x\to 5} 5x^3$。

(3) $\lim_{x\to 5}\dfrac{2x^2}{x+5}$。 (4) $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-5}{5x+5}$。

解

練習 4

試求下列各函數的極限

(1) $\lim_{x\to 3}(x^3-5x)$。 (2) $\lim_{x\to -2}(5x^2-3x)$。

(3) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+4}$。 (4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-2}{x^2+2}$。

解

多項式函數的極限

配合課本例題 5

例題 5

已知 $f(x)=4x^5-3x-2$、$g(x)=-2x^2+x+1$，

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。 (2) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$。

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)g(x))$。

解

練習 5

已知 $f(x)=2x+5$ 、 $g(x)=-x^2+3x+2$ ，

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$。 (2) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$。

(3) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)g(x))$。

解

有理函數極限的處理原則

配合課本例題 6

例題 6

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x-5}$。 (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5}{5x+1}$。

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+7x}{x+3}$。 (4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-5}{5x-5}$。

解

練習 6

試求下列各函數的極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x+2}$。 (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x}{2x+1}$。

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^3+7x}{x-3}$。 (4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+3x+2}{x-5}$。

解

配合課本 P.59~P.64

主題 3 函數的連續性與中間值定理及其應用（勘根定理）

1. 函數的連續性

(1)若 c 在函數 $f(x)$ 的定義內且滿足 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$，則稱 $f(x)$ 在 $x=c$ 連續。

(2)若函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 每一點都連續且滿足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$、$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，則稱 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續。

(3)若函數 $f(x)$ 在定義域內每一點都連續，則稱 $f(x)$ 為連續函數。

2. 中間值定理

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續且 $f(a)\neq f(b)$，若 k 為介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的實數，則在開區間 (a, b) 連續之中存在實數 c，使得 $f(c)=k$。

3. 勘根定理

設 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續且兩端點的函數值 $f(a)$ 與 $f(b)$ 異號，則在開區間 (a, b) 連續之中存在實數 c，使得 $f(c)=0$。

配合課本例題 7

函數的連續性

例題 7

(1)已知函數 $f(x)=\begin{cases}2x^2+a, & x\leq -1\\ x^2+x+3, & x>-1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 時為連續，試求實數 a 之值。

(2)已知函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+ax-2}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 時為連續，試求實數 a 之值。

解

練習 7

已知函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\leq -1\\ -2x+5, & -1<x\leq 0\\ x+b, & x>0\end{cases}$，$a$、$b$ 為實數且 $f(x)$ 為連續函數，試求 a、b 之值。

解

中間值定理

配合課本例題 8

例題 8

設函數 $f(x)=(x-1)(x+5)-x$，試證明在區間 $(-5, 1)$ 中存在實數 c，使得 $f(c)=1$。

解

練習 8

設函數 $f(x)=x^2-3x+5$，試證明在區間 $(-1, 1)$ 中存在實數 c，使得 $f(c)=5$。

解

勘根定理

配合課本例題 9

例題 9

若 $f(x)=2x(3x-5)-2^3$ 於實數上為連續函數，試證明 $f(x)=0$ 在區間 $(-1, 1)$ 中至少有一實根。

解

練習 9

試證明方程式 $x^5+3x-5=0$ 必有一實根。

解

配合課本 P.64~P.65

主題 4 夾擠定理

設實函數 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$，若 c 為在開區間 (a, b) 中一點且滿足：

(1)若對於 (a, b) 中不等於 c 的 x，皆有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$。

(2) $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$。

則 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$。

配合課本例題 10

夾擠定理

例題 10

已知當 $-1 < x < 1$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $x^3 - 2x^2 + 6 \leq f(x) \leq x^3 + 6$，試求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$。

解

練習 10

已知當 $0 < x < 2$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $-x^2 + 3x \leq f(x) \leq 3x^2 - 5x + 4$，試求 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$。

解

1–3 自我評量

基礎題

1. ______ 設 $f(x)=\begin{cases}2x^2+1,\ x>1\\ x+2,\ x\le 1\end{cases}$，試選出正確的選項。

(A) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3$ (B) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ (C) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=9$ (D) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$

(E) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在 〔配合主題 1〕

2. 設 $f(x)=\begin{cases}x^2+5,\ x>2\\ 3x+3,\ -2<x\le 2\\ -x+2,\ x\le -2\end{cases}$，試求下列之值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$。 (2) $f(2)$。 (3) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$。 (4) $f(-2)$。 〔配合例題 2〕

3. 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(-4x+3)$。 (2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$。 (3) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-3x-10)$。 (4) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^2-2x-5)$。

〔配合例題 5〕

4. 試求下列各極限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{1-x}$。 (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{\cos x}$。 (3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{x-2}$。 (4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$。 〔配合例題 6〕

5. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x-1}\right)$ 之值。 〔配合例題 4〕

6. 設 a 為實數且極限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+a}{x-2}$ 存在，試求

(1) a 之值。 (2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+a}{x-2}$ 的極限值。 〔配合主題 1〕

7. 已知多項式 $f(x)=4x-2$、$g(x)=-x^2+10$，試求下列各函數的極限。

(1) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$。 (2) $\lim\limits_{x\to3}g(x)$。 (3) $\lim\limits_{x\to3}(f(x)g(x))$。 〔配合例題 4〕

8. 函數 $f(x)=\begin{cases}x^2+a,\ x\le3\\-x^2+3x+5,\ x>3\end{cases}$，在 $x=3$ 時為連續，則 a 之值。 〔配合例題 7〕

9. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}2x^2-a,\ x\ge1\\-x+1,\ 0\le x<1\\x-b,\ x<0\end{cases}$，$a$、$b$ 為實數且函數 $f(x)$ 為連續，則 a、b 之值。

〔配合例題 7〕

10. 已知當 $-1<x<1$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $-x^3-3x^2+5\le f(x)\le -x^3+5$，試求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

〔配合例題 10〕

進階題

11.已知 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，試求 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}$ 之值。〔配合例題 6〕

12.________若 $f(x)=6x^4-5x^3+2x^2-5x-4$ 於實數上為連續函數，且 $f(x)=0$ 在 -2 與 3 之間有相異兩實根，試選出此二實根個別會於下列所在之區間之內。

(A) $(-2,-1)$　(B) $(-1,0)$　(C) $(0,1)$　(D) $(1,2)$　(E) $(2,3)$　〔配合例題 9〕

13.試求 $\lim_{x\to -2}\frac{(x+1)^{50}-1}{x+2}$ 之值。〔配合例題 6〕

14.已知 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+b}{(x-2)(3-x)}=-5$，試求數對 (a, b)。〔配合例題 6〕

15.已知 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}$ 存在，試求

(1)數對 (a, b)。　(2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+b}{(x-2)^2}$。〔配合例題 6〕

第 1 章　實力檢測

單選題（每題 4 分）

________ 1. 設 $f(x)=2x^2-4x+1$、$g(x)=x-1$，則 $g(f(x))$ 為

(A) $2x^2-8x-3$　(B) $2x^2-8x+7$　(C) $2x^2-4x+7$　(D) $2x^2-4x$

(E) $2x^2-4x-2$

________ 2. 高斯符號 $[x]$ 表「小於或等於 x 之整數中最大整數」，則 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{36}]=$

(A) 111　(B) 121　(C) 131　(D) 141　(E) 151

________ 3. 多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n，則極限 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ 為下列哪一選項？

(A) 0　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3　(E)不存在　〔103 指考甲〕

________ 4. 試選出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 10^{n+1}-3\cdot 10^{2n}}{7\cdot 10^{n+2}+6\cdot 10^{2n-1}}$ 之值。

(A) $\dfrac{2}{70}$　(B) $\dfrac{20}{7}$　(C) 5　(D) -5　(E) $-\dfrac{1}{2}$

________ 5. 設一無窮等比級數的首項 $a_1=0.\overline{5}$，第二項 $a_2=0.\overline{25}$，則此級數的和為

(A) $\dfrac{11}{9}$　(B) $\dfrac{12}{11}$　(C) $\dfrac{15}{11}$　(D) $\dfrac{55}{48}$　(E) $\dfrac{55}{54}$

多選題（每題 6 分，錯一個得 3 分，錯二個得 1 分，其餘不給分）

________ 6. 已知數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$、$\langle d_n\rangle$、$\langle e_n\rangle$ 定義如下：

$a_n=(-1)^n$、$b_n=a_n+a_{n+1}$、$c_n=(-\frac{\sqrt{10}}{3})^n$、$d_n=\frac{c_n}{3}$、$e_n=\frac{1}{c_n}$；$n=1, 2, 3, \cdots$

下列選項中，試選出會收斂的無窮級數。

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ (E) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e_n$ 〔107 指考乙〕

________ 7. 設函數 $f(x)=\begin{cases}3x+3, & \text{當 } x\leq -1\\ x^2-1, & \text{當 } -1<x\leq 1\\ x-1, & \text{當 } x>1\end{cases}$，試選出正確的選項。

(A) $f(0)=-1$ (B) $f(-1)=f(1)$ (C) $f(f(2))=1$ (D) $f(f(-2))=-6$

(E) $f(f(1))=1$

________ 8. 設函數 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$，試選出正確的選項。

(A) $f(x)$ 之定義域為 $\{x\,|\,0\leq x\leq 2,\ x\in\mathbb{R}\}$

(B) $f(x)$ 之值域為 $\{y\,|\,0\leq y\leq 1,\ y\in\mathbb{R}\}$

(C)對於所有定義域中的 x，$f(x)\geq f(1)$ 恆成立

(D)函數 $f(x)$ 的圖形為圓的右半部部分

(E)函數 $f(x)$ 的圖形為圓的上半部部分

________ 9. 設 $x>0$，試選出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3x^n+7}{x^n-2}$ 可能之值。

(A) 0 (B) ∞ (C) $-\frac{7}{2}$ (D) -3 (E) -4

______ 10.若 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$ 為三數列，試選出正確的選項。

(A)若 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 均發散，則無窮數列 $\langle a_n+2b_n\rangle$ 的極限可能存在

(B)若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 的極限存在，則 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$ 兩數列均為收斂

(C)對於任何自然數 n，若 $a_n<c_n$ 且 $\langle c_n\rangle$ 為收斂，則 $\langle a_n\rangle$ 必收斂

(D)對於任何自然數 n，若 $a_n<b_n<c_n$ 且 $\langle a_n\rangle$、$\langle c_n\rangle$ 均為收斂數列，則 $\langle b_n\rangle$ 為收斂數列

(E)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

填充題（每格 3 分）

11.試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)}=$ ______ 。

12.函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+2)=f(x)$，且 $f(2)=2$、$f(3)=-2$，則 $f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+f(4)-f(5)$ 之值為 ______ 。

13.設 $f(x)$ 為二次多項函數且 x^2 的係數為 1，又 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{x-3}=4$，則 $f(x)=$ ______ 。

14.已知 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+ax-2b}{(x+1)^2}$ 存在，試求

(1)數對 $(a,\ b)=$ ______ 。　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+ax-2b}{(x+1)^2}=$ ______ 。

15.已知當 $-3<x<3$ 時，函數 $f(x)$ 滿足 $2x^3-3x^2-1\le f(x)\le 2x^3-1$，則 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$_______。

16.有一皮球自高 30 公尺的高處自由落下，設每次反彈高度為前次高度之 $\frac{2}{3}$，則自開始掉下至停止為止，皮球所經過的距離共_______公尺。

17.試求無窮級數 $0.2+0.022+0.00222+0.0002222+\cdots=$_______。

18.試求下列之值：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{15}\frac{1}{k(k+1)}=$_______。 (2) $\sum\limits_{k=15}^{29}\frac{1}{k(k+1)}=$_______。 (3) $\sum\limits_{k=10}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=$_______。

19.試求下列之值：

(1) $\sum\limits_{k=10}^{20}\frac{1}{k(k+2)}=$_______。 (2) $\sum\limits_{k=10}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=$_______。

計算題（每題 11 分）

20.手機剩餘電量經常用手機上電量剩餘的格子數來顯示，今有一款手機當充滿電時，螢幕的電量顯示為 6 格。設在待機 x 小時 $(x\geq 0)$ 後，剩餘電量的顯示格數為 $f(x)=[\frac{70}{x+11}]$ 格，其中符號 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。試問：

(1)待機 9 小時後，顯示剩餘電量的格子數。(5 分)

(2)若剩餘電量的顯示格子數為 4 格時，待機時間的範圍為何？(6 分)

1

NOTE