2-2 矩陣的乘法運算與反矩陣

配合課本 P.70~P.74

主題 1 矩陣的乘法

1. 矩陣的乘法

若 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times p}$，則 A、B 的乘積 $AB=C$ 為 $m\times p$ 階矩陣，且 C 的第 i 列第 j 行的元素 c_{ij} 為矩陣 A 的第 i 列與矩陣 B 的第 j 行之對應元素乘積之和，即 $C=AB=[c_{ij}]_{m\times p}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \vdots & b_{1j} & \vdots & b_{1p} \\ b_{21} & \vdots & b_{2j} & \vdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \vdots & b_{nj} & \vdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

2. 兩矩陣可相乘的條件

當 A 的行數與 B 的列數相等時，A 與 B 才能相乘，$A_{m\times n}\,B_{n\times p}=C_{m\times p}$。

相等

C的階數 $m\times p$

矩陣的乘法 1

例題 1

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，試求 AB 及 BA。

解

練習 1

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，試求 AB 及 BA。

解

矩陣的乘法 2

配合課本例題 1

例題2

矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$，試求 AB 及 BA。

解

練習2

矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\3 & 5 & 7\\6 & 8 & 9\end{bmatrix}$，試求 AB 及 BA。

解

2

矩陣的乘法 3

例題3

設 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\-3 & 6\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\0 & 5\end{bmatrix}$，試求 AB 與 AC。

解

練習3

設 $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\1 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}-5 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$，試求 AB 與 AC。

解

配合課本例題 2

矩陣的乘法 4

例題 4

設 A 為 2×2 階矩陣，且滿足

$$A\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0\\4&0\end{bmatrix}\text{ 與 }A\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\0&-6\end{bmatrix},$$

試求 $A\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$。

解

練習 4

設 A 為 3×2 階矩陣，且滿足

$$A\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\4&0\\5&0\end{bmatrix}\text{ 與 }A\begin{bmatrix}0&-3\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-2\\0&3\end{bmatrix},$$

試求 $A\begin{bmatrix}1&-3\\2&4\end{bmatrix}$。

解

主題 2　矩陣乘法的性質

配合課本 P.75~P.79

1. 矩陣乘法與實數乘法相異

若 A、B、C 為矩陣，且下列各矩陣的運算皆有意義，則：

(1)矩陣乘法不滿足交換律，即 AB 與 BA 不一定相等。

(2)兩個不為零矩陣的矩陣相乘，其乘積可能為零矩陣。

(3)若 $AB=O$，無法推得 $A=O$ 或 $B=O$。

(4)矩陣乘法不滿足消去律，即若 $AB=AC$ 且 $A\neq O$，無法推得 $B=C$。

2. 矩陣乘法的性質

若 r 為實數，A、B、C 為矩陣，且下列各矩陣的運算皆有意義，則：

(1) $A(BC)=(AB)C=ABC$。

(2) $A(B+C)=AB+AC$。

(3) $(A+B)C=AC+BC$。

(4) $r(AB)=(rA)B=A(rB)$。

矩陣的乘法性質 1

例題 5

若矩陣 A 為 2×3 階矩陣，B 為 3×2 階矩陣，試選出正確的選項。

(A) AB 為 2×2 階矩陣

(B) BA 為 2×2 階矩陣

(C) AB 與 BA 為同階矩陣

(D) $AB=BA$

解

練習 5

若 A、B 為矩陣，試選出錯誤的選項。

(A) AB 與 BA 為同階矩陣

(B) $AB=BA$

(C)若 $AB=O$，則 $BA=O$

(D)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

解

配合課本例題 3

矩陣的乘法結合律

例題 6

令 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-2\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$，

試求 $(AB)C$ 與 $A(BC)$。

解

練習 6

令 $A=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\\2&2\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\end{bmatrix}$、

$C=\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&-1&1\end{bmatrix}$，試求 $(AB)C$ 與 $A(BC)$。

解

矩陣的乘法分配律

配合課本例題 4

例題 7

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，

試求 $A(B+C)$ 與 $AB+AC$。

解

練習 7

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，

試求 $(A+B)C$ 與 $AC+BC$。

解

矩陣的乘法性質 2

配合課本例題 5

例題 8

令 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，試

求 $2(AB)$、$(2A)B$ 與 $A(2B)$。

解

練習 8

令 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$，試求

$2(AB)$、$(2A)B$ 與 $A(2B)$。

解

配合課本例題 6

矩陣的乘法性質應用

例題 9

設 M 為二階方陣且滿足 $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$、$M\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}$。

(1) $x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$，試求數對 (x, y)。

(2)試求 $M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$。

解

練習 9

設 M 為二階方陣且滿足 $M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$、$M\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$。

(1) $x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，試求數對 (x, y)。

(2)試求 $M\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。

解

主題 3　單位方陣與矩陣的次方

配合課本 P.79~P.80

1. 單位方陣

若 n 階方陣的對角線元素都是 1，而其他元素都是 0，則稱其為 n 階**單位方陣**，記為 I_n。

例如：$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$、$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

2. 單位方陣的性質

(1)若 A 為 n 階方陣，則 $I_nA=AI_n=A$。

(2)若 A 為 $m\times n$ 階矩陣，則 $I_mA=AI_n=A$。

3. 矩陣的次方

(1)定義：若 A 為 n 階方陣，令 k 為正整數，定義 $A^k=AA\cdots A$（k 個 A 相乘）。

(2)性質：若 h、k 都是正整數，則 $A^hA^k=A^{h+k}$。

4. 一般的矩陣無乘法公式

因為矩陣乘法不滿足交換律，即 AB 與 BA 未必相等，因此

(1) $(A+B)^2$ 與 $A^2+2AB+B^2$ 不一定相等。

(2) $(A+B)(A-B)$ 與 A^2-B^2 不一定相等。

(3) $(AB)^2=ABAB$ 與 A^2B^2 不一定相等。

矩陣的次方

配合課本例題 7

例題 10

設 $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$，試求 A^2 與 A^3。

解

練習 10

設 $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$，試求 A^2 與 A^3。

解

配合課本 P.81~P.85

主題 4　二階反方陣

1. 反方陣

設 A 為 n 階方陣，若存在一個 n 階方陣 B 使得 $AB=BA=I_n$，則稱 A 為可逆方陣，此時 B 稱為 A 的反方陣或反矩陣，並以符號 A^{-1} 表示。

2. 反方陣的性質

反方陣若存在則必唯一。

3. 二階反方陣的公式解

若 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 滿足 $\det A=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，則 A 是可逆方陣，且其反矩陣為

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

4. 不可逆方陣的判定

當 $\det A=0$ 時，則 A 為不可逆方陣，其反矩陣不存在。

反之，當 A 為不可逆方陣時，則 $\det A=0$。

配合課本例題 8

二階反方陣

例題 11

試判斷下列各矩陣是否為可逆方陣，若為可逆方陣，則求出其反矩陣。

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$。　(2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$。

解

練習 11

試判斷下列各矩陣是否為可逆方陣，若為可逆方陣，則求出其反矩陣。

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$。　(2) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$。

解

配合課本例題 9

不可逆方陣的判定

例題 12

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ a & 3\end{bmatrix}$ 是不可逆方陣，試求 a 之值。

解

練習 12

若 $A=\begin{bmatrix}a & a-1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 是不可逆方陣，試求 a 之值。

解

主題 5　反方陣的應用

配合課本 P.80~P.81

二元一次方程組 $\Gamma:\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 可以用矩陣乘法表示為 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$。

令 $A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$、$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$，則方程組可表示為 $AX=C$。

若 $\det A\neq 0$，即 A^{-1} 存在，可得方程組的解為 $X=A^{-1}C$。

配合課本例題 10

利用反方陣求解方程組

例題 13

利用反方陣解二元一次方程組

$\begin{cases}x+2y=4\\ 3x+4y=10\end{cases}$。

解

練習 13

利用反方陣解二元一次方程組

$\begin{cases}x+2y=5\\ 2x+3y=9\end{cases}$。

解

2-2 自我評量

基礎題

1.若 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&3\end{bmatrix}$。

(1)試求 AB 及 BA。 (2) AB 及 BA 是否相等。 〔配合例題 1〕

2.若 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&3\end{bmatrix}$、$C=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}$。

(1)試求 BC。 (2)試求 $(AB)C$ 及 $A(BC)$。

(3) $(AB)C$ 及 $A(BC)$ 是否相等。 〔配合例題 1、6〕

3.設 A 為 2×2 階矩陣，且滿足 $A\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\9&0\end{bmatrix}$ 與 $A\begin{bmatrix}0&0\\0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&-4\end{bmatrix}$，試求矩陣 A。

〔配合例題 4〕

4.________ 設 A、B 為 2 階方陣且 $O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。(單選)

(A)若 $AB=O$，則 $BA=O$

(B)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

(C)若 $AB=I$，則 $BA=I$

(D) $(AB)^2=A^2B^2$ 〔配合主題 3、4、5〕

5. M 為二階方陣且滿足 $M\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$、$M\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$。

(1) $x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$，則數對 $(x, y)=$ ________。

(2) $M\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=$ ________。

〔配合例題 9〕

6. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，試求　(1) AB。　(2) BA。　(3) AB 和 BA 是否相等。

〔配合例題 1〕

7. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$，試求 A^2 與 A^3。

〔配合例題 10〕

8. 設矩陣 $A(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\\t & 4\end{bmatrix}$，(1)試求 $A(3)$ 的反方陣。　(2)若 $A(t)$ 的反方陣不存在，則 t 的值。

〔配合例題 11、12〕

9. 利用反方陣解二元一次方程組 $\begin{cases}x+2y=1\\3x+4y=2\end{cases}$。

〔配合例題 13〕

10.小娟與小華互相通訊，約定以矩陣的第 1 行元素和代表第 1 個英文字母，第 2 行元素和代表第 2 個英文字母，以此類推。而元素和為 1 表 A，元素和為 2 表 B，以此類推。所以矩陣 $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ 的第 1 行元素和為 13 代表英文字母 M，第 2 行元素和為 5 代表英文字母 E，所以該矩陣的通訊代表為 ME。後來再約定進行加密，將矩陣乘上 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ 即為加密後矩陣為 $\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 30 & 14 \end{bmatrix}$，試求矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ 的加密後矩陣。〔配合例題 1〕

進階題

11.若方陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 且 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，試求 AB 及 $(AB)^{-1}$。〔配合例題 1、11〕

12.若方陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 且 $B^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，試求 $(AB)^{-1}$。

13.設方陣 A 滿足 $A^2=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 且 $A^3=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求方陣 A。〔配合例題 10、11〕

14.設 P、Q、R 為二階方陣，已知 $PQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$、$PR=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ 且 $Q+R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，則 $P=$ ______。〔103 指考乙〕

第 2 章　實力檢測

單選題（每題 4 分）

______ 1. 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，若 A 的乘法反方陣不存在，試選出實數 x 值的選項。

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4　(E) 8

______ 2. 設 $\begin{bmatrix} a+b & b \\ 2a-3b & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 1 & 2z \end{bmatrix}$，試選出 $a+b+x+y+z$ 值的選項。

(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E)無法計算

______ 3. 試選出下列哪一個選項中的矩陣乘積等於 $\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$。

(A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$　〔101 指考乙〕

______ 4. 設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 且 A 的行列式之值為 1，試選出為 A 的反方陣選項。

(A) $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2c} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2d} \end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

______ 5. 將反方陣解矩陣方程式運用於密碼學中，首先用矩陣將英文字母編碼，例如：a 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 表示，b 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 表示，c 以 $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ 表示，⋯，z 以 $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ 表示，而單字 ” god” 以 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 表之。今為了保密而將某英文單字以矩陣 A 表示，再選取加密矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，計算 BA 後再傳出，若收到的結果是 $\begin{bmatrix} 2 & 17 & 10 \\ 4 & 35 & 20 \end{bmatrix}$，試選出為原英文單字的選項。

(A) dog　(B) are　(C) the　(D) cat　(E) cow

多選題（每題 5 分，錯一個得 3 分，錯二個得 1 分，其餘不給分）

______ 6. 試選出矩陣階數為 2×3 的選項。

(A) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}$

______ 7. 關於矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\0&0\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(A) A 是 2 階方陣　(B) A 有 3 列 2 行　(C) A 是 3×2 階矩陣

(D) A 的 $(2, 1)$ 元是 3　(E) A 的第 1 列元素和為 4

______ 8. 下表是兩年前三種零食分別在兩間超市的單價：(單位：元 / 包)

	超市甲	超市乙
蘇打餅	30	28
薯片	55	50
魷魚絲	70	66

上表以單價矩陣 $\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}$ 表示。如果這兩間超市都以每年 3% 的比例調漲物品的價格，試問下列哪些選項的計算結果可以代表現在這些零食在這兩間超市的單價矩陣？

(A) $2\cdot(1.03)\cdot\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}$　(B) $(1.03)^2\cdot\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}2\cdot(1.03)&0&0\\0&2\cdot(1.03)&0\\0&0&2\cdot(1.03)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}(1.03)&0&0\\0&(1.03)&0\\0&0&(1.03)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.03&0\\0&1.03\end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix}(1.03)^2&(1.03)^2&(1.03)^2\\(1.03)^2&(1.03)^2&(1.03)^2\\(1.03)^2&(1.03)^2&(1.03)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30&28\\55&50\\70&66\end{bmatrix}$　〔104 指考乙〕

______ 9.設 3 階方陣 $A=[a_{ij}]$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases}1, & i>j \\ 2, & i\le j\end{cases}$，試選出正確的選項。

(A)方陣 A 的第一列第二行的元素為 1　(B)方陣 A 的第二列第二行的元素為 2

(C)方陣 A 的第一列的元素和為 4　(D)方陣 A 的第三行的元素和為 6

(E)方陣 A 的所有元素總和為 15

______ 10.設 A 為 2 階方陣且 $O=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(A) $A+O=A$　(B) $A+I=A$　(C) $A\times O=A$　(D) $A\times I=A$　(E) I 有乘法反方陣 I

填充題（每格 3 分）

11.設 A 為 2×2 階矩陣，且滿足 $A\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 與 $A\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}$，則 $A=$ ______。

12.設 $A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix}$ 且 A 的行列式之值為 3，則 $\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y & -x\\ -3 & 2\end{bmatrix}=$ ______。

(答案不含未知數)

13.設 $A+B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$、$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$，則 $A=$ ______，$B=$ ______。

14.承上題，則 $A^2-B^2=$ ______。

15.設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}x&2\\3&9\end{bmatrix}$，若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立，則 $x=$ ______。

16.設 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 且 $A^5=[b_{ij}]$，則 $b_{11}+b_{22}=$ ______。

17.設 a、b、c、d、e、x、y、z 皆為實數，考慮矩陣相乘：

$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&5&7\\-4&6&e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&x&7\\0&y&7\\-11&z&23\end{bmatrix}$，則 $y=$ ______。　〔107 學測〕

18.設 x、y 為實數，且滿足 $\begin{bmatrix}3&-1&3\\2&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$，則 $x+3y=$ ______。　〔108 學測〕

19. M 為二階方陣且滿足 $M\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$、$M\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$，試求 $M\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=$ ______。

20.若方陣 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\x&y\end{bmatrix}$、$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\z&3\end{bmatrix}$ 且 $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}5&12\\8&u\end{bmatrix}$，則 $x=$ ______，$y=$ ______，

$z=$ ______，$u=$ ______。

計算題（每題 8 分）

21.小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，志明向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

志明卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。試幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。〔99 指考乙〕