



條件機率與貝氏定理



3-1 條件機率與獨立事件

配合課本
P.98-P.107

主題 1 條件機率

1. 主觀機率

沒有完整次數分配表為依據，主要由人類心智判斷產生的機率，也稱個人機率。

2. 客觀機率

有真正次數分配表為依據的機率，如古典機率、頻率機率等。

3. 條件機率

設 A 、 B 為二事件， $P(B) > 0$ ，在已知事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的機率為

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

配合課本例題 1

例題 1

小明上了高中之後開始用功，第一次段考完後他猜測， A ：英文會及格、 B ：數學會及格、 C ：英文和數學都及格、以及 D ：英文或數學及格這四個事件的機率分別是 0.65、0.55、0.5、0.8。根據機率性質，檢視這四個事件的主觀機率是否合理。

解

主觀機率

練習 1

學校籃球隊準備參加球學盃校際球賽準決賽，隊長預測， A ：第一場獲勝、 B ：第二場獲勝、 C ：第一場和第二場都獲勝、以及 D ：第一場或是第二場獲勝這四個事件的機率分別是 0.7、0.5、0.4、0.8。根據機率性質，檢視這四個事件的主觀機率是否合理。

解

配合課本例題 2

例題 2

連續擲一個均勻硬幣三次，若已知正面至少出現一次，試求正面恰好出現三次的機率。

解**條件機率 1****練習 2**

連續擲一個均勻硬幣三次，若已知正面至少出現一次，試求反面至少出現二次的機率。

解

配合課本例題 3

例題 3

某數學老師統計班上數學學期成績，有 40% 的人不及格，而這 40% 不及格的人經過重修後有 80% 的人會及格，若小文的數學學期成績及格，試求他是重修過的機率。

解**條件機率 2****練習 3**

某飲料店推出當日前 17 杯有獎的週年慶抽獎活動，分成買一送一及折價兩種，其中 2 杯飲料為買一送一，抽中的機率皆為 0.025，5 杯為折價 20 元，抽中的機率皆為 0.05，10 杯為折價 10 元，抽中的機率皆為 0.07，若小新去買一杯飲料抽中的是折價券，試求他是抽中折價 20 元的機率。

解

配合課本例題 4

條件機率 3

練習 4

例題 4

同時擲兩顆公正骰子，觀察所出現的點數，試求

- (1) 若已知兩顆骰子點數相同，則點數和大於 9 的機率。
- (2) 若已知點數和大於 9，則兩顆骰子點數相同的機率。

解

甲、乙兩人各投擲一顆骰子一次，試求

- (1) 若已知甲投擲的點數小於乙投擲的點數，則兩人投擲的點數和為 7 之機率。
- (2) 若已知兩人投擲的點數和為 7，則甲投擲的點數小於乙投擲的點數之機率。

解

配合課本例題 5

條件機率 4

練習 5

例題 5

從一副 52 張的撲克牌中任抽一張，若已知抽出黑桃，試求抽中的牌是 J 的機率。

解

從一副 52 張的撲克牌中任抽一張，若已知抽出 Q 或 J 時，試求抽中的牌是黑桃的機率。

解

主題 2 獨立事件和互斥事件

1. 獨立事件

當事件 A 和 B 滿足 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ，則稱 A 和 B 為獨立事件。即已知 A 發生時，對於 B 的機率沒有任何影響。

2. 獨立事件的判斷

以下任一條件成立時，事件 A 和 B 為互相獨立：

- (1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 。
- (2) $P(B|A) = P(B)$ 。 ($P(A) > 0$)
- (3) $P(A|B) = P(A)$ 。 ($P(B) > 0$)

3. 餘事件的獨立性質

若已知事件 A 和 B 獨立，則

- (1) 事件 A' 和 B 獨立。 (2) 事件 A 和 B' 獨立。 (3) 事件 A' 和 B' 獨立。

4. 獨立事件與互斥事件

假設 $P(A) > 0$ 且 $P(B) > 0$ ，則

- (1) 若 A 和 B 互斥，則 A 和 B 不獨立。 (2) 若 A 和 B 獨立，則 A 和 B 不互斥。

配合課本例題 6

獨立事件的判斷 1

練習 6

例題 6

擲一顆公正骰子 2 次，令 A 代表點數和是 6 的事件、 B 代表第 1 次擲出 3 點的事件，試求

- (1) $P(B|A)$ 。 (2) 事件 A 和 B 是否獨立。

解

擲一顆公正骰子 2 次，令 A 代表點數和是 8 的事件、 B 代表第 1 次擲出 2 點的事件。試計算 $P(A \cap B)$ 和 $P(A)$ ，並判斷 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 是否成立。

解

配合課本例題 7

例題 7

擲一顆公正骰子兩次，令 A 代表點數和為奇數的事件、 B 代表兩個點數相等的事件，試判斷事件 A 和 B 是否獨立。

解

獨立事件的判斷 2

練習 7

擲一顆公正骰子兩次，令 A 代表點數和為偶數的事件、 B 代表點數積為奇數的事件，試判斷事件 A 和 B 是否獨立。

解

3

配合課本例題 8

例題 8

從一副 52 張的撲克牌中任抽一張，令 A 為抽中黑桃的事件、 B 為抽中 K 的事件，試求 $P(B|A')$ 和 $P(B)$ 並判斷事件 A' 和 B 是否獨立。

解

餘事件的獨立性質

練習 8

從一副 52 張的撲克牌中任抽一張，令 A 為抽中 K 的事件、 B 為抽中黑桃的事件，試求 $P(B|A')$ 和 $P(B)$ 並判斷事件 A' 和 B 是否獨立。

解

獨立事件 1

例題 9

某學校教師中，已婚男老師有 18 人，已婚女老師有 30 人，未婚男老師有 12 人，未婚女老師有 x 人，若該校的教師中，性別與婚姻狀況無關，試求

(1) x 之值。

(2) 今加入新進男老師 10 人後，性別與婚姻狀況仍為獨立狀態，則新進男老師中，已婚者有幾人。

解

練習 9

某電腦公司目前聘用 150 人，其性別與國籍分配如下表，試問應再聘用幾名外國女性，才能達到性別與國籍獨立的目標。

	本國籍	外國籍
男	80	30
女	40	0

解

獨立事件 2

例題 10

陳先生和林小姐一起到遊樂場玩打靶遊戲，陳先生射擊命中靶的機率是 $\frac{2}{5}$ ，林小姐的機率是 $\frac{1}{2}$ ，陳先生先射，林小姐後射；陳先生射中與否不會影響林小姐的命中率，若他們兩人向靶各射一次，試求此靶被命中的機率。

解

練習 10

設甲、乙、丙三人解題的能力分別為 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{2}{3}$ ，且彼此解題互不影響，今三人獨立同解一題，試求此題被解出的機率。

解

配合課本例題 9

獨立事件與互斥事件

例題 1.1

已知 A 、 B 為同一樣本空間的二事件，且

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{12}.$$

- (1) 若 A 、 B 為互斥事件，試求 $P(B)$ 之值。
 (2) 若 A 、 B 為獨立事件，試求 $P(B)$ 之值。

解

練習 1.1

已知 A 、 B 為同一樣本空間的二事件，且

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}.$$

- (1) 若 A 、 B 為互斥事件，試求 $P(A' \cap B)$ 之值。
 (2) 若 A 、 B 為獨立事件，試求 $P(A' \cap B)$ 之值。

解

3

主題 3 列聯表

配合課本
P.114-P.118

以列表方式表示兩個（或多個）變數或屬性共同出現的頻率。或者是將兩個屬性變數的不同取值置於行和列的位置，在表格中填入變數組合取值的頻數的表格，所以也稱雙向表。

	A_1	A_2	合計
B_1	a	b	$a+b$
B_2	c	d	$c+d$
合計	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

配合課本例題 10

例題 1 2

某班級填寫喜好飲料二選一的問卷，得到以下數據：50 人中，男生佔 29 人、女生 21 人。男生當中 20 人比較喜歡可樂，而女生當中 15 人比較喜歡果汁。若從此班 50 人中隨意抽出一人。

- (1) 試求此人較喜歡可樂的機率。
- (2) 若已知抽出的人喜歡可樂，試求此人是男生的機率。

解**列聯表求機率 1****練習 1 2**

某班級填寫喜好飲料二選一的問卷，得到以下數據：50 人中，男生佔 29 人、女生 21 人。男生當中 20 人比較喜歡可樂，而女生當中 15 人比較喜歡果汁。若從此班 50 人中隨意抽出一人。

- (1) 試求此人較喜歡果汁的機率。
- (2) 若已知抽出的人是男生，試求此人喜歡果汁的機率。

解

配合課本例題 11

例題 1 3

學校調查某班級近視狀況，得到以下數據：50 人中，男生佔 20 人、女生 30 人。男生當中 16 人近視，而女生當中 25 人近視。若從此班 50 人中隨意抽出一人。

- (1) 試求此人近視的機率。
- (2) 若已知抽出的人是女生，試求此人近視的機率。

解**列聯表求機率 2****練習 1 3**

學校調查某班級近視狀況，得到以下數據：50 人中，男生佔 20 人、女生 30 人。男生當中 16 人近視，而女生當中 25 人近視。若從此班 50 人中隨意抽出一人。

- (1) 試求此人為男生的機率。
- (2) 若已知抽出的人近視，試求此人是男生的機率。

解

配合課本例題 12

例題 14

學期結束，某班 40 人中有 20 人英文及格，有 25 人數學及格，有 15 人兩科都及格。

- (1) 用列聯表呈現以上數據資訊。
- (2) 自班上任選一人，若此人英文及格，試求他數學也及格的機率。

解

列聯表與條件機率 1

練習 14

某語言學校 45 人中，有 30 個學生會日語，有 25 個學生會西班牙語，有 15 個學生兩種語言都會。

- (1) 用列聯表呈現以上數據資訊。
- (2) 今任選一名學生，已知他會日語，試求他會西班牙語的機率。

解

配合課本例題 13

例題 15

某校調查 200 位高一同學對於升高二選組，其中包括 120 位男生和 80 位女生。男生中有 30 人選一類組、50 人選二類組、其他選三類組，而女生中有 45 人選一類組、10 人選二類組、其他選三類組。

- (1) 試將以上資料用列聯表表示。
- (2) 從 200 位同學中任抽一人，若已知抽中女生，試求她選二類組的機率。

解

列聯表與條件機率 2

練習 15

某大學科系調查 100 位新生的上學方式，其中包括 60 位男生和 40 位女生。男生中有 40 人騎機車、15 人搭捷運、其他坐公車，而女生中有 10 人騎機車、25 人搭捷運、其他坐公車。

- (1) 試將以上資料用列聯表表示。
- (2) 從 100 位同學中任抽一人，若已知抽中男生，試求他騎機車的機率。

解



3-1 自我評量



基礎題

1. 已知 A 、 B 為兩事件且 $P(A) = \frac{1}{2}$ 、 $P(B) = \frac{1}{3}$ 、 $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ ，試求

(1) $P(A|B) =$ _____ ◦ (2) $P(A'|B) =$ _____ ◦

(3) $P(A'|B') =$ _____ ◦ (4) $P(A|B') =$ _____ ◦

[配合例題 2]

2. 已知 $P(A) = \frac{2}{5}$ 、 $P(B) = \frac{4}{5}$ ，則 $P(A|B)$ 的最大值為 _____，最小值為 _____ ◦

[配合例題 2]

3. 設 A 、 B 是樣本空間 S 的事件， $P(A) = \frac{1}{5}$ 、 $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ ◦

(1) 若 A 與 B 為互斥事件，則 $P(B) =$ _____ ◦

(2) 若 A 與 B 為獨立事件，則 $P(B) =$ _____ ◦

[配合例題 11]

4. 某一家庭有三個小孩，設每一個小孩是男孩或女孩的機率相等。若已知三個小孩中至少有一個是男孩，則此三個小孩中恰有兩個男孩的機率為 _____ ◦ [配合例題 3]

5. 擲一枚均勻硬幣三次，已知至少出現二正面，則第一次出現正面的機率為 _____ ◦

[配合例題 2]

6. 擲一顆公正骰子兩次，在點數和是 7 的條件下，第二次擲出 3 點的機率為 _____。
[配合例題 4]

7. 一盒子中有 12 顆燈泡，其中有 4 顆是不良品，品管人員現在逐顆拿出來檢查，不再放回，試求檢查到第五個時出現第三個不良品的機率為 _____。
[配合例題 2]

8. 擲三枚相同且均勻的硬幣一次，則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率為 _____。
[配合例題 2]

9. 高一甲班的學生登記訂購校慶紀念商品，有 30 人買徽章，有 10 人買背包，有 5 人兩種都買。今自班上任選一人，試求

(1) 若已知此人買徽章，則他也買背包的機率為 _____。

(2) 若已知此人買背包，則他也買徽章的機率為 _____。
[配合主題 1]

10. 甲、乙、丙三人參加某校入學考試，依平日成績推估：甲、乙、丙錄取的機率依次分別為 0.5、0.6、0.8，且三人錄取與否為獨立事件，則

(1) 三人中至少有一人錄取的機率為 _____。

(2) 三人中恰有兩人錄取的機率為 _____。
[配合例題 10]

進階題

11. _____ 擲一均勻硬幣，若連續三次出現同一面就停止。設 a 為恰好投擲三次就停止的機率； b 為在第一次是反面的情況下，恰好在第四次停止的條件機率； c 為在第一次、二次都是反面的情況下，恰好在第五次停止的條件機率。試選出正確的選項。(單選) [98 數甲]

(A) $a = b = c$ (B) $a > b > c$ (C) $a < b < c$ (D) $a < b = c$ (E) $a > b = c$

12. _____ 某疾病可分為兩種類型：第一類占 70%，可藉由藥物 A 治療，其每一次療程的成功率為 70%，且每一次療程的成功與否互相獨立；其餘為第二類，藥物 A 治療方式完全無效。在不知道患者所患此疾病的類型，且用藥物 A 第一次療程失敗的情況下，進行第二次療程成功的條件機率最接近下列哪一個選項？

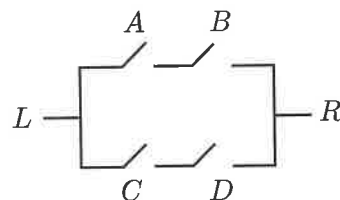
(A) 0.25 (B) 0.3 (C) 0.35 (D) 0.4 (E) 0.45 [103 學測]

13. 某藥品測試欲徵求試用者 135 人，其性別與國籍雙向表如表，若欲使性別與國籍獨立，而且 $x > y$ ，則數對 $(x, y) =$ _____。 [配合例題 9]

	本國籍	外國籍
男性	50	x
女性	y	20

14. 下列電路圖中有 4 個開關，各開關接上的機率均為 $\frac{2}{3}$ ，且各開關的操作獨立，則電流由左端流到右端的機率為 _____。

[配合例題 10]



15. 設一袋中有 3 紅球、7 白球，若某人平日說謊的機率為 $\frac{1}{5}$ ，他隨機取一球，若他說取到的是紅球，則他取到的球確實為紅球的機率為 _____。 [配合例題 2]