時間序列分析
–總體經濟與財務金融之應用–

時間序列中的 AR 迴歸模型

陳旭昇

2013.12

時間序列漸近理論

定義 (遍歷性)

如果一個定態時間序列的自我共變異數滿足以下充分條件:

$$\gamma(k) \longrightarrow 0 \text{ as } k \longrightarrow \infty,$$

我們稱該序列具有遍歷性 (ergodic)。

含混地說, 時間序列具遍歷性代表該序列為漸近獨立 (asymptotically indepent)。亦即, 隨著 y_t 與 y_{t-k} 隨著距離越離越遠而趨近獨立。

時間序列漸近理論

在了解遍歷性的概念後, 我們有以下的重要定理, 以建構時間序列的大數法則: Ergodic 定理 (Ergodic Theorem)。

定理 (Ergodic 定理)

給定時間序列 y_t 為嚴格定態, 具遍歷性, 且 $E(y_t^2) < \infty$, 則

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \xrightarrow{p} E(y_t),$$

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{p} \gamma(k)$$

$$\hat{\rho}(k) \xrightarrow{p} \rho(k).$$

時間序列漸近理論

我們介紹時間序列另一個重要概念: 平賭序列 (martingale)。

定義 (平賭序列)

如果時間序列 y_t 滿足

$$E(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_1) = y_{t-1},$$

則我們稱 y_t 為一平賭序列 (martingale)。

亦即, 給定到本期為止的資訊下, 對於下一期最佳的預期值就是本期值。

時間序列漸近理論

定義 (平賭差序列)

如果時間序列 ε_t 滿足

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) = 0,$$

則我們稱 ε_t 為一平賭差序列 (martingale difference sequence), 簡稱 MDS。

值得注意的是, 根據雙重期望值法則 (law of iterated expectation), 對於 $j \geq 1$,

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-j}) = E\Big[\underbrace{E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1)}_{=0} \Big| \varepsilon_{t-j}\Big] = 0$$

因此,

$$E(\varepsilon_t) = E\big[E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-j})\big] = 0,$$

亦即平賭差序列的期望值為零。

時間序列漸近理論

性質 (平賭差序列隱含無序列相關)

若 ε_t 為 MDS, 則

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0.$$

由於 $E(\varepsilon_t) = 0$,

$$\begin{aligned} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) \\ &= E\left[E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k} | \varepsilon_{t-k})\right] \\ &= E\left[\varepsilon_{t-k} \underbrace{E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-k})}_{=0}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

時間序列漸近理論

以下兩個性質連結平賭序列與平賭差序列。

性質 (平賭序列 vs. 平賭差序列)

1. 若 y_t 為平賭序列, 則 Δy_t 為平賭差序列。
2. 若 ε_t 為平賭差序列, 則

$$y_t = \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

為平賭序列。

時間序列漸近理論

以上兩性質的證明如下。

令 $\Omega_t = \{y_t, y_{t-1}, \ldots, y_1\}$,

1.

$$\begin{aligned} E(\Delta y_t|\Omega_{t-1}) &= E(y_t - y_{t-1}|\Omega_{t-1}) \\ &= E(y_t|\Omega_{t-1}) - y_{t-1} \\ &= y_{t-1} - y_{t-1} = 0 \end{aligned}$$

時間序列漸近理論

2.

$$
\begin{aligned}
E(y_t | \Omega_{t-1}) &= E(y_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) \\
&= E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots + \varepsilon_1 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) \\
&= E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) \\
&\qquad + E(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) \\
&= 0 + E(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots, \varepsilon_1) \\
&= \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \cdots + \varepsilon_1 \\
&= y_{t-1}
\end{aligned}
$$

時間序列漸近理論

最後我們介紹 MDS 的中央極限定理 (MDS-CLT)。

定理 (MDS-CLT)

給定 ε_t 為嚴格定態, 具遍歷性之平賭差序列, 且 $E(\varepsilon_t^2) < \infty$, 則

$$\sqrt{T}\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

其中

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t}{T}.$$

AR 係數估計式的大樣本性質

考慮以下定態 AR(p) 模型,

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

其中 $E(y_t^4) < \infty$, 且 $\varepsilon_t \sim^{i.i.d.} (0, \sigma^2)$。亦即干擾項 ε_t 為均齊變異 (homoskedasticity), 且不具序列相關。

AR 係數估計式的大樣本性質

令

$$x_t = \begin{bmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} c \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

以及 $u_t = \varepsilon_t$, 則迴歸模型可再改寫成

$$y_t = x_t'\phi + u_t.$$

AR 係數估計式的大樣本性質

因此, ϕ, σ^2 與 $Var(\hat{\phi})$ 的估計式分別為

$$\hat{\phi} = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\, x_t{}'\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\, y_t\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-p-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\phi}\, y_{t-1} - \hat{\phi}_2\, y_{t-2}\ldots - \hat{\phi}_p\, y_{t-p})^2$$

$$\widehat{Var(\hat{\phi})} = \hat{\sigma}^2\left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t{}'\right)^{-1}$$

AR 係數估計式的大樣本性質

要了解 $\hat{\phi}$ 的性質, 首先注意到 $x_t u_t$ 為 MDS:

$$E(x_t u_t | I_{t-1}) = x_t \underbrace{E(u_t | I_{t-1})}_{0} = 0.$$

其中 $E(u_t | I_{t-1}) = 0$ 是由於 u_t 為 i.i.d. 序列。

AR 係數估計式的大樣本性質

而 $x_t u_t$ 的變異數-共變數矩陣為

$$
\begin{aligned}
E(x_t u_t u_t x_t') &= E(u_t^2 x_t x_t') \\
&= EE(u_t^2 x_t x_t' | I_{t-1}) \\
&= E(x_t x_t' \underbrace{E(u_t^2 | I_{t-1})}_{\sigma^2}) \\
&= E(x_t x_t' \sigma^2) \\
&= \sigma^2 E(x_t x_t').
\end{aligned}
$$

其中 $E(u_t^2 | I_{t-1}) = E(u_t^2) = \sigma^2$ 也是由於 u_t 為 i.i.d. 序列。

AR 係數估計式的大樣本性質

因此, AR 係數估計式的大樣本性質如底下性質所示。

性質 (AR 係數估計式的大樣本性質)

1. 一致性
$$\hat{\phi} \xrightarrow{p} \phi$$
2. 漸近分配
$$\hat{\phi} \overset{A}{\sim} N\left(\phi, \frac{\sigma^2 Q^{-1}}{T}\right),$$
其中 $Q = E[x_t x_t{}']$.

AR 係數估計式的大樣本性質

Proof.

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi} &= \left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t y_t\right) \\
&= \left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t (x_t'\phi + u_t)\right) \\
&= \left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)\phi + \frac{1}{T}\Sigma x_t u_t\right] \\
&= \phi + \left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}\left[\frac{1}{T}\Sigma x_t u_t\right]
\end{aligned}
$$

AR 係數估計式的大樣本性質

1.

$$\hat{\phi} - \phi = \underbrace{\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}}_{\xrightarrow{p} E[x_t x_t']^{-1}} \underbrace{\left[\frac{1}{T}\Sigma x_t u_t\right]}_{\xrightarrow{p} 0} \xrightarrow{p} 0$$

亦即,

$$\hat{\phi} \xrightarrow{p} \phi$$

AR 係數估計式的大樣本性質

2.

$$\begin{aligned}\sqrt{T}(\hat{\phi}-\phi) &= \sqrt{T}\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t u_t\right)\\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{T}\Sigma x_t x_t'\right)^{-1}}_{\xrightarrow{p} Q^{-1}}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{T}}\Sigma x_t u_t\right]}_{\xrightarrow{d} N(0,\sigma^2 Q)}\\ &\xrightarrow{d} N(0, Q^{-1}\sigma^2 Q Q^{-1}) \stackrel{d}{=} N(0, \sigma^2 Q^{-1})\end{aligned}$$

因此,

$$\hat{\phi}-\phi \stackrel{A}{\sim} N(0, \frac{\sigma^2 Q^{-1}}{T}),$$

亦即,

$$\hat{\phi} \stackrel{A}{\sim} N(\phi, \frac{\sigma^2 Q^{-1}}{T}).$$

AR 係數估計式的大樣本性質

最後值得一提的是, 由於 AR 迴歸式中, 嚴格外生性的假設並不符合,

$$E(u_t|\cdots, x_{t+1}, x_t, x_{t-1}) \neq 0,$$

因此

$$E(\hat{\phi}) \neq \phi,$$

亦即 $\hat{\phi}$ 並不是 ϕ 的不偏估計式。

Newey-West HAC 估計式

在上一節假設 u_t 為 i.i.d. 以及均齊變異 (homoskedasticity), 因此,

$$E(x_t u_t u_t x_t') = E(u_t^2)E(x_t x_t') = \sigma^2 E(x_t x_t').$$

且 $Var(\hat{\phi})$ 的估計式為

$$\widehat{Var(\hat{\phi})} = \hat{\sigma}^2 \left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t{}' \right)^{-1}.$$

然而, 一般的時間序列資料可能無法滿足此 i.i.d. 假設。

Newey-West HAC 估計式

- 因此, 我們可以進一步考慮當 u_t 有序列相關且為非均齊變異 (heteroskedasticity) 時, $Var(\hat{\phi})$ 的穩健估計式 (robust estimator)。
- Newey and West(1987) 提出了一種考慮序列相關與非均齊變異的估計式, 稱做「非均齊變異-序列相關一致估計式」(簡稱 HAC 估計式), (Heteroskedasticity Autocorrelation Consistent estimator, HAC), 又稱 Newey-West HAC 估計式 (Newey-West HAC estimator), 或是 Newey-West 估計式 (Newey-West estimator)。

Newey-West HAC 估計式

我們以一個簡單的 AR(1) 模型來說明 Newey-West 估計式。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t.$$

令 $x_t = y_{t-1}$, 則 AR(1) 迴歸模型可以改寫成

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t.$$

已知 β_1 的估計式為

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})y_t}{\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2} \\ &= \beta_1 + \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})u_t}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2}\end{aligned}$$

Newey-West HAC 估計式

由於

$$\bar{x} \xrightarrow{p} \mu_x,$$

且

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 \xrightarrow{p} \sigma_x^2,$$

則 $\hat{\beta}_1 - \beta_1$ 的大樣本近似可以寫成

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 \approx \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}[x_t - \mu_x]u_t}{\sigma_x^2}.$$

Newey-West HAC 估計式

令 $v_t = [x_t - \mu_x]u_t$, 則上式可以改寫成

$$\hat{\beta}_1 - \beta_1 \approx \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t}{\sigma_x^2}.$$

因此,

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var\left(\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t}{\sigma_x^2}\right) = \frac{Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t\right)}{(\sigma_x^2)^2}.$$

Newey-West HAC 估計式

1. 如果 v_t 為 $i.i.d.$, 則

$$Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t\right) = \frac{Var(v_t)}{T},$$

且

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{Var(v_t)}{T(\sigma_x^2)^2}.$$

Newey-West HAC 估計式

2. 當 v_t 為序列相關,

$$
\begin{aligned}
& Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\Big[\sum_{i=1}^{T} Var(v_i) + 2(T-1)Cov(v_t, v_{t-1}) \\
&\quad + 2(T-2)Cov(v_t, v_{t-2}) + \cdots + 2Cov(v_t, v_{t-T+1})\Big], \\
&= \frac{Var(v_t)}{T} f_T,
\end{aligned}
$$

Newey-West HAC 估計式

其中

$$f_T = 1 + 2\sum_{j=1}^{T-1}\left(\frac{T-j}{T}\right)\rho_j,$$

$$\rho_j = \frac{Cov(v_t, v_{t-j})}{\sqrt{Var(v_t)Var(v_{t-j})}} = \frac{Cov(v_t, v_{t-j})}{Var(v_t)}.$$

Newey-West HAC 估計式

因此,

$$Var(\hat{\beta}_1) = \underbrace{\left(\frac{Var(v_t)}{T(\sigma_x^2)^2}\right)}_{(A)} \underbrace{f_T}_{(B)}.$$

- (A)= 當序列相關不存在時, $\hat{\beta}_1$ 的變異數估計式。
- (B)= 為了考慮序列相關所多出來的項次。

Newey-West HAC 估計式

我們要如何估計 $Var(\hat{\beta}_1)$? Newey and West (1987) 的建議為以下的估計式,

$$\hat{\Sigma}_{NW} = \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1} \hat{f}_T,$$

其中, $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}$ 為傳統的 White 非均齊變異變異數估計式, 而 f_T 的估計式為

$$\begin{aligned} \hat{f}_T &= 1 + 2\sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{m-j}{m}\right) \hat{\rho}_j, \\ &= 1 + 2\sum_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{j}{q+1}\right) \hat{\rho}_j, \end{aligned}$$

Newey-West HAC 估計式

其中 $q = m - 1$,

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=j+1}^{T} \hat{v}_t \hat{v}_{t-j}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{v}_t^2},$$

以及

$$\hat{v}_t = (x_t - \bar{x})\hat{u}_t.$$

Newey and West (1994) 建議以底下的公式選擇 q (取到整數),

$$q = 4\left(\frac{T}{100}\right)^{2/9}.$$

Newey-West HAC 估計式

如果我們考慮 AR(p) 模型, 令

$$x_t = \begin{bmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} \qquad \phi = \begin{bmatrix} c \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

且

$$\hat{\phi} = \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \, x_t{}' \right)^{-1} \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \, y_t \right),$$

Newey-West HAC 估計式

則 $Var(\hat{\phi})$ 的 Newey-West 估計式為

$$\left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t{}'\right)^{-1} \left[\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 x_t x_t' \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{q}\left(1 - \frac{j}{q+1}\right) \sum_{t=j+1}^{T} (x_t \hat{u}_t \hat{u}_{t-j} x'_{t-j} + x_{t-j} \hat{u}_{t-j} \hat{u}_t x'_t)\right]$$
$$\left(\sum_{t=1}^{T} x_t x_t{}'\right)^{-1}.$$